UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002 — Álgebra Linear I
Atividade Formativa 2

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Seja $F = \Big((2,2,-1),(2,-1,2),(-1,2,2),(1,1,1)\Big)$ uma sequência de vetores em $\mathbb{R}^3$. Então:

☐ **a)** F é um conjunto gerador, mas não é uma base, de $\mathbb{R}^3$

☐ **b)** F é uma base de $\mathbb{R}^3$, distinta da base canónica.

☐ **c)** F é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

☐ **d)** $\dim\langle(2,2,-1),(2,-1,2),(-1,2,2),(1,1,1)\rangle = 4$.

2. Seja $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com característica 3 e seja $\mathcal{C}(A)$ o seu espaço das colunas. Então, o sistema $AX = B$

☐ **a)** é possível se e só se $B = 0$,

☐ **b)** é possível se e só se $B \in \mathcal{C}(A)$,

☐ **c)** é sempre possível, qualquer que seja $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$,

☐ **d)** é sempre impossível, qualquer que seja $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$,

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $f(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$. Então, $\mathcal{M}(f; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3})$ é a matriz

☐ **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

☐ **d)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Seja $p_S(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ o polinómio característico de uma matriz S. Então:

☐ **a)** os valores próprios de S são -1, 0 e 1.

☐ **b)** os valores próprios de S são 0 e 1.

☐ **c)** todos os valores próprios de S têm multiplicidade algébrica igual a 2.

☐ **d)** a matriz S pode não ter valores próprios.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Designando por (α_n) a sucessão real cujos elementos são α_n, definem-se a soma de duas sucessões e o produto de uma sucessão por um escalar real do modo seguinte:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_n) = (\lambda \cdot x_n),$$

Seja X o conjunto de todas as sucessões reais (α_n) que satisfazem, $\forall n \geqslant 3, \alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$.

a) Mostre que X, munido das operações sobre sucessões, é um espaço vetorial.

b) Determine a dimensão e uma base de X.

III. Mostre que qualquer das duas sequências $\mathcal{B} = \big((-1,1,0),(2,0,1),(0,1,1)\big)$ e $\widetilde{\mathcal{B}} = \big((1,-1,0),(1,0,1),(1,2,0)\big)$, é uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as matrizes de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\widetilde{\mathcal{B}}$ e de $\widetilde{\mathcal{B}}$ para $\mathcal{B}$.

IV. Considere a transformação $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(f) = f' + f$, onde f' representa a derivada do polinómio f.

a) Mostre que T é uma aplicação linear.

b) Sendo $\mathcal{D}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ à sua escolha, determine a matriz $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})$.

c) Determine as dimensões da imagem e do núcleo de T.

d) Investige se T é invertível e, caso seja, calcule a sua inversa, T^{-1}.

V. Considere a aplicação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(x,y) = (x-y, x+y)$. Esboce geometricamente os conjuntos Q e $R(Q)$, onde $Q = [0,1]\times[0,1]$. Recorrendo apenas ao esboço e a argumentos geométricos diga, justificando, se espera que a aplicação R possa ter algum valor próprio real.

VI. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores e vetores próprios de A e conclua que A é diagonalizável. Utilizando este resultado, calcule A^5.

FIM