U.C. 21002
Álgebra Linear I

18 de fevereiro 2019

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II** a **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

II	III	IV	V	VI
3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

> Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Então:

- ☐ a) A não é invertível.
- ☐ b) $\det A = 1$.
- ☐ c) $\det(5A) = 5 \det A$.
- ☐ d) $\det(-A) = -\det A$.

Questão 2

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Então:

- ☐ a) 1 é valor próprio de A.
- ☐ b) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}^\top$ é vetor próprio de A.
- ☐ c) A é diagonalizável.
- ☐ d) A não é invertível.

Questão 3

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 - 5A = I_n$. Então:

- ☐ a) A é invertível.
- ☐ b) $\det A = 1$.
- ☐ c) $\det A = 5$.
- ☐ d) $\det A = 0$.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Sejam F e G os subespaços lineares de $\mathbb{R}^3$ definidos por
$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y\}$ e $G = \langle(1, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle$. Então:

☐ a) $\dim F = 1$.

☐ b) $\dim G = 1$.

☐ c) $\dim(F + G) = 1$.

☐ d) $\dim(F \cap G) = 1$.

Questões de desenvolvimento

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Se λ é valor próprio de A então a matriz $A - \lambda I_n$ é invertível.

b) Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, então a matriz $A - A^\top$ é hemi-simétrica. (Recorde que A diz-se hemi-simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, \ldots n$.)

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 11y + 5z = 9 \\ 4x + 18y + 3z = 11 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando claramente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: ....

Nº de Estudante: .... **B. I./C.C. nº** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

IV. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Determine os valores próprios da matriz A.

b) Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.

c) Justifique que a matriz A é diagonalizável, e determine matrizes invertíveis P e D tais que $P^{-1}AP = D$.

V. *Nota*: Havia uma gralha no enunciado deste grupo. Onde está um "d" deveria estar um "w".

Considere a aplicação $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z, w) = (x - y, y - z, z - d)$.

a) Mostre que f é uma aplicação linear.

b) Determine o núcleo de f.

c) Determine a dimensão da imagem de f.

d) Determine se f é injetiva, e se f é sobrejetiva.

e) Considerando as bases canónicas em $\mathbb{R}^4$ e em $\mathbb{R}^3$ determine a matriz que representa f.

VI. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que para cada linha i de A se tem $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \alpha$. Mostre que α é um valor próprio de A.

Sugestão: Determine um vetor próprio de A.

FIM