UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

U.C. 21082
Matemática Finita

30 de junho de 2020

Critérios de avaliação

- Para a correção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efetuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações incorretas.

Correção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1. (**Exame**: 1.60 valor) Pretende-se determinar o número total de conjuntos da forma $\{b\}\cup C$ com $b \in B$ e $C \subseteq A\setminus B$. Como $\#(A\setminus B) = n-k$, existem 2^{n-k} possibilidades para o conjunto C e, escolhido um, existem k possibilidades para o b, num total de $k2^{n-k}$ possibilidades.

2. (**Exame**: 1.30 valor) Pelo binómio de Newton,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^k\frac{1}{x^{12-k}} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^{2k-12}$$

Uma vez que não existe nenhum valor inteiro $0 \leq k \leq 12$ tal que $2k-12 = 3$, conclui-se que o coeficiente pedido é igual a 0.

3. (**Exame**: 2.80 valores)

3.1. (**Exame**: 0.70 valor) Um número é divisível por 9 se, e só se, é da forma $9k$, $k \in \mathbb{N}$. Logo, procura-se o número de elementos $k \in \{0, 1, \ldots\}$ tais que

$$0 \leq 9k \leq 1000,$$

que é equivalente a $0 \leq k < \frac{1000}{9}$. Existem, assim, 112 números entre 0 e 1000, inclusive, que são divisíveis por 9.

3.2. (**Exame**: 2.10 valores; **E-fólio global**: 2.0 valores[1]) Uma vez que 1000 não é divisível por 9, mas 999 é-o, temos que nos concentrar nos números naturais $0 \leq N \leq 999$. Atendendo ao critério de divisibilidade por 9 do texto sobre Congruências, os números N procurados são assim da forma $N = (x_1x_2x_3)_{10}$ com $x_1+x_2+x_3$ divisível por 9. Os casos seguintes podem então acontecer:

- $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \implies x_1 = x_2 = x_3 = 0$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 9 \quad (*)$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 18 \quad (**)$
- $x_1 + x_2 + x_3 = 27 \implies x_1 = x_2 = x_3 = 9$

O caso $(*)$ é idêntico ao do problema da pág. 67 do manual. Pelo mesmo raciocínio conclui-se que existem

$$\binom{9+3-1}{9} = \binom{11}{9} = 55$$

diferentes soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 9$. O caso (**) resolve-se seguindo a sugestão do Exercício 5 da pág. 77 do manual. Considere-se o conjunto S_1 das soluções de (**) com $x_1 > 9$. Estas soluções correspondem às soluções da equação $(y_1 + 10) + x_2 + x_3 = 18$, equivalente a $y_1 + x_2 + x_3 = 8$. Tal como em (*), decorre então do problema da pág. 67 do manual que existem

$$\binom{8+3-1}{8} = \binom{10}{8} = 45$$

elementos do conjunto S_1. Definindo S_2 e S_3 como o conjunto das soluções de (**) com, respetivamente, $x_2 > 9$ e $x_3 > 9$, conclui-se de igual modo que

$$\#S_2 = \#S_3 = \#S_1 = 45$$

Sendo o número total de soluções inteiras não negativas de (**) igual a

$$\binom{18+3-1}{18} = \binom{20}{18} = 190$$

(cf. problema da pág. 67 do manual), conclui-se que o número total de soluções de (**) com $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 9$ é igual a

$$190 - \#S_1 - \#S_2 - \#S_3 = 55^{2}.$$

Considerando os quatro casos possíveis resultantes do critério de divisibilidade por 9, confirma-se o valor $1 + 55 + 55 + 1 = 112$ encontrado na alínea 3.1.

[1] Pergunta 1 do e-fólio global.

[2] Note-se que $\#(S_i \cap S_j) = \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0$, $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

4. (**Exame**: 3.80 valores)

4.1. (**Exame e E-fólio global**: 2.0 valores[3])

Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso tem-se

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{1}{k} = \binom{1}{0} = 1 = 2^0$$

o que prova o caso base.

Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **arbitrário**, suponhamos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$$

Tese de indução:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2(n+1)+1}{k} = 2^{2(n+1)}.$$

Passo de indução: Pela lei de Pascal,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+3}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+3}{k}\\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1}\left\{\binom{2n+2}{k} + \binom{2n+2}{k-1}\right\}\\ &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+2}{k-1},\end{aligned}$$

em que pela mudança de variável $m = k-1$ a última soma é igual a

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{2n+2}{m} = -\binom{2n+2}{n+1} + \sum_{m=0}^{n+1}\binom{2n+2}{m}.$$

Deste modo,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+3}{k} = -\binom{2n+2}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{k}. \tag{1}$$

O mesmo raciocínio aplicado à última soma em (1) permite então concluir que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+2}{k} = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{2n+1}{k-1} &= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\\ &= \binom{2n+1}{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\end{aligned}$$

[3]Pergunta 3 do e-fólio global.

Ou seja,

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{2n+3}{k} = -\binom{2n+2}{n+1} + 2\binom{2n+1}{n+1} + 4\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k},$$

em que pela hipótese de indução

$$4\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 4\,2^{2n} = 2^{2n+2}$$

e, pela lei de Pascal e pela lei da simetria,

$$\begin{aligned}
-\binom{2n+2}{n+1} + 2\binom{2n+1}{n+1} &= -\binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n+1}{n} + 2\binom{2n+1}{n+1} \\
&= \binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n+1}{n} = \binom{2n+1}{n+1} - \binom{2n+1}{n+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conclusão: Pelo método de indução matemática, fica assim provado que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

4.2. (**Exame**: 1.80 valor) Pelo teorema binomial tem-se

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k},$$

em que mediante a mudança de variável $m = 2n+1-k$ e a aplicação da lei da simetria,

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{2n+1-m} = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{m}.$$

Em alternativa, poder-se-ía considerar uma primeira mudança de variável - $m = k-(n+1)$ - seguida da mudança de variável $r = n-m$:

$$\sum_{k=n+1}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{m+n+1} = \sum_{m=0}^{n}\binom{2n+1}{n-m} = \sum_{r=0}^{n}\binom{2n+1}{r},$$

onde na segunda igualdade se aplicou a lei da simetria.

Independentemente da(s) mudança(s) de variável realizada(s), no final obtém-se

$$2^{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} = 2\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} \implies \sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}.$$

5. (**Exame**: 2.0 valores) Comece-se por observar que a equação dada é equivalente a

$$n \mid ax - b,$$

pelo que existe $x \in \mathbb{Z}$ solução da equação $ax \equiv b \pmod{n}$ se, e só se,

$$\exists\, x \in \mathbb{Z}\, \exists\, y \in \mathbb{Z} : \underbrace{ax - b = ny}_{ax-ny=b}.$$

Pelo Corolário 1.8, tal acontece se, e somente se, $\mathrm{mdc}(a, n) \mid b$.

6. (**Exame**: 3.50 valores)

6.1. (**Exame**: 1.80 valor; **E-fólio global**: 1.70 valor[4]) Pelo Corolário 1.8 existe solução inteira da equação dada se, e somente se, $\mathrm{mdc}(9957, 381) \mid 7$. Por sucessivas aplicações do algoritmo de Euclides (Lema 1.4) tem-se

- $9957 = 381 \times 26 + 51 \implies \mathrm{mdc}(9957, 381) = \mathrm{mdc}(381, 51)$
- $381 = 51 \times 7 + 24 \implies \mathrm{mdc}(381, 51) = \mathrm{mdc}(51, 24)$
- $51 = 24 \times 2 + 3 \implies \mathrm{mdc}(51, 24) = \mathrm{mdc}(24, 3)$

em que

$$\mathrm{mdc}(24, 3) = \mathrm{mdc}(3 \times 8, 3) = 3\,\mathrm{mdc}(8, 1) = 3$$

Ou seja, $\mathrm{mdc}(9957, 381) = 3$. Como 3 não divide o número primo 7, conclui-se que não existe solução inteira da equação.

6.2. (**Exame**: 1.70 valor) Novamente pelo algoritmo de Euclides (Lema 1.4) tem-se

- $1724 = 105 \times 16 + 44 \implies \mathrm{mdc}(1724, 105) = \mathrm{mdc}(105, 44)$
- $105 = 44 \times 2 + 17 \implies \mathrm{mdc}(105, 44) = \mathrm{mdc}(44, 17)$

Como o número primo 17 não é divisor de 44, resulta do Lema 1.11 alínea 1 que $\mathrm{mdc}(1724, 105) = \mathrm{mdc}(44, 17) = 1$, que é um divisor de 3. Logo e pelo Exercício 5, existem soluções inteiras da equação $1724x \equiv 3 \pmod{105}$.

7. (**Exame**: 5.0 valores; **E-fólio global**: 4.60 valores[5])

7.1. (**Exame**: 1.60 valor; **E-fólio global**: 1.50 valor) A relação do enunciado é equivalente à relação de recorrência

$$a_n = 85a_{n-1} - 1764a_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

sendo o polinómio característico correspondente igual a

$$p(t) = t^2 - 85t + 1764,$$

de raízes iguais a 36 e 49. Cada termo a_n da solução geral é então igual a

$$a_n = \alpha 36^n + \beta 49^n,$$

[4] Pergunta 4 do e-fólio global.
[5] Grupo 5 do e-fólio global.

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 13, \quad 36\alpha + 49\beta = a_1 = 559.$$

Ou seja, $\alpha = 6$ e $\beta = 7$. Consequentemente,

$$a_n = 6^{2n+1} + 7^{2n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

7.2. (**Exame**: 1.75 valor; **E-fólio global**: 1.60 valor) De modo equivalente, pretende-se verificar que 13 é um divisor de cada a_n, o que decorre do Exercício 3.1.3 da Atividade Formativa 2 para $a = 6$ e $b = 7$, já que cada $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, é um número natural ímpar.

7.3. (**Exame**: 1.65 valor; **E-fólio global**: 1.50 valor) Como $a_n, 13 \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, pela Proposição 1.13 tem-se

$$\mathrm{mmc}(a_n, 13) = \frac{13a_n}{\mathrm{mdc}(a_n, 13)}.$$

Como 13 é um número primo e, pela alínea anterior, $13 \mid a_n$, $n \in \mathbb{N}$, conclui-se pela Lema 1.11 alínea 1 que $\mathrm{mdc}(a_n, 13) = 13$. Deste modo,

$$\mathrm{mmc}(a_n, 13) = a_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. (E-fólio global) Como $\mathrm{mdc}(n, (n-1)! + 1) = n$, então n é um divisor de $(n-1)! + 1$. Pelo Teorema de Wilson isto significa que n é um número primo. Logo, pelo Lema 1.11 alínea 1, tem-se que $\mathrm{mdc}(n, n-2) = 1$ ou $\mathrm{mdc}(n, n-2) = n$. A última possibilidade está excluída, pois tendo-se $n - 2 < n$, n só poderá ser um divisor de $n - 2$ se $n - 2 = 0$, possibilidade que está excluída pela hipótese $n > 2$. Conclusão: $\mathrm{mdc}(n, n-2) = 1$.