UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

U.C. 21082
Matemática Finita

28 de junho de 2021

Critérios de avaliação

- Para a correção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efetuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações incorretas.

Correção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

1.1. Um número é divisível por 5 se, e somente se, o algarismos das unidades for igual a 0 ou a 5. Assim,

$$\begin{aligned}&\{(a,b,c) : 5 \mid (6a41b2c)_{10}\}\\ &= \{(a,b,0) : a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\} \cup \{(a,b,5) : a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}\end{aligned}$$

(união disjunta), pelo que

$$\begin{aligned}&\#\{(a,b,c) : 5 \mid (6a41b2c)_{10}\}\\ &= \#\{(a,b,0) : a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\} + \#\{(a,b,5) : a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}\\ &= (10 \times 10) + (10 \times 10) = 200.\end{aligned}$$

1.2. De acordo com o critério de divisibilidade por 9 do texto sobre Congruências, $(6a41b2c)_{10}$ é divisível por 9 se, e só se,

$$6 + a + 4 + 1 + b + 2 + c = 13 + a + b + c$$

for um múltiplo de 9. Para que um tal número também seja divisível por 5, dois casos terão de ser considerados: $c = 0$ ou $c = 5$. Atendendo a que $a, b \in \mathbb{N}$ com $0 \leq a, b \leq 9$, para a primeira situação os casos possíveis são assim

- $13 + a + b = 18 \iff a + b = 5 \quad (*)$
- $13 + a + b = 27 \iff a + b = 14 \quad (**)$

O caso $(*)$ é idêntico ao do problema da pág. 67 do manual. Pelo mesmo raciocínio conclui-se que existem

$$\binom{5+2-1}{5} = \binom{6}{5} = 6$$

diferentes soluções da equação $a + b = 5$. Para o caso $(**)$ existem 5 soluções da equação $a + b = 14$.

Para a situação $c = 5$, os casos possíveis são então

- $13 + a + b + 5 = 18 \iff a = b = 0$
- $13 + a + b + 5 = 27 \iff a + b = 9$
- $13 + a + b + 5 = 36 \iff a + b = 18 \iff a = b = 9$

em que, de modo análogo a $(*)$, existem

$$\binom{9+2-1}{9} = \binom{10}{9} = 10$$

diferentes soluções da equação $a + b = 9$.

Considerando os cinco casos possíveis resultantes dos critérios de divisibilidade por 9 e por 5, conclui-se que existem $6+5+1+10+1 = 23$ diferentes números da forma $(6a41b2c)_{10}$ que são divisíveis por 5 e por 9.

1.3. Comecemos por determinar quantos números da forma $(6a41b2c)_{10}$ são divisíveis por 9. Atendendo ao critério de divisibilidade por 9 do texto sobre Congruências, há três casos a considerar:

- $13 + a + b + c = 18 \iff a + b + c = 5$
- $13 + a + b + c = 27 \iff a + b + c = 14 \quad (***)$
- $13 + a + b + c = 36 \iff a + b + c = 23$

Tal como anteriormente, existem

$$\binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$$

diferentes soluções da equação $a + b + c = 5$.

O caso (***) resolve-se seguindo a sugestão do Exercício 5 da pág. 77 do manual. Considere-se o conjunto S_1 das soluções de (***) com $x_1 > 9$. Estas soluções correspondem às soluções da equação $(y_1 + 10) + x_2 + x_3 = 14$, equivalente a $y_1 + x_2 + x_3 = 4$. Decorre então do problema da pág. 67 do manual que existem

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

elementos do conjunto S_1. Definindo S_2 e S_3 como o conjunto das soluções de (***) com, respetivamente, $x_2 > 9$ e $x_3 > 9$, conclui-se de igual modo que

$$\#S_2 = \#S_3 = \#S_1 = 15$$

Sendo o número total de soluções inteiras não negativas de (***) igual a

$$\binom{14+3-1}{14} = \binom{16}{14} = 120$$

(cf. problema da pág. 67 do manual), conclui-se que o número total de soluções de (***) com $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 9$ é igual a

$$120 - \#S_1 - \#S_2 - \#S_3 = 75^1.$$

Relativamente à equação $a+b+c = 23$, note-se as soluções procuradas são da forma

$$(9 - x_1) + (9 - x_2) + (9 - x_3) = 23 \iff x_1 + x_2 + x_3 = 4$$

para $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 9$, $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$. Tal como anteriormente conclui-se que existem

$$\binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

diferentes soluções da equação $x_1 + x_2 + x_3 = 4$.

Considerando os três casos possíveis resultantes do critério de divisibilidade por 9, conclui-se que existem $21 + 75 + 15 = 111$ diferentes números da forma $(6a41b2c)_{10}$ que são divisíveis por 9.

Designando por X_5 (resp., X_9) o conjunto dos números da forma $(6a41b2c)_{10}$ que são divisíveis por 5 (resp., por 9), conclui-se pelas alíneas anteriores que existem

$$\#(X_5 \cup X_9) = \#X_5 + \#X_9 - \#(X_5 \cap X_9) = 200 + 111 - 23 = 288$$

diferentes números da forma $(6a41b2c)_{10}$ que são divisíveis por 5 ou por 9.

2.1. Resolução: Fim pág. 46, início pág. 47 do manual.

2.2. Mediante a mudança de variável $m = r + i$ obtém-se

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{r+i}{i} = \sum_{m=r}^{r+n} \binom{m}{m-r},$$

[1] Note-se que $\#(S_i \cap S_j) = \#(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = 0$, $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

onde

$$\begin{aligned}\sum_{m=r}^{r+n}\binom{m}{m-r} &= \sum_{m=r}^{r+n}\binom{m}{r} \quad \text{(pela lei da simetria)}\\ &= \binom{r+n+1}{r+1} \quad \text{(pela fórmula adição do índice superior)}\\ &= \binom{r+n+1}{n} \quad \text{(pela lei da simetria)}\end{aligned}$$

3. Como $\mathrm{mdc}(ac, bd) = 1$, pelo teorema de Bachet-Bézout existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$(ac)x + (bd)y = 1$$

Como $cx, dy \in \mathbb{Z}$, a igualdade é ainda igual a $a(cx)+b(dy) = 1$, o que pelo Corolário 1.8 implica que $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$ já que, por definição, $\mathrm{mdc}(a, b) > 0$. De igual modo conclui-se que c e d são números primos entre si.

4. Por definição de máximo divisor comum,

$$\mathrm{mdc}(-63792, 725) = \mathrm{mdc}(63792, 725),$$

Por sucessivas aplicações do algoritmo de Euclides (Lema 1.4) tem-se

- $63792 = 725 \times 87 + 717 \implies \mathrm{mdc}(63792, 725) = \mathrm{mdc}(725, 717)$
- $725 = 717 \times 1 + 8 \implies \mathrm{mdc}(725, 717) = \mathrm{mdc}(717, 8)$
- $717 = 8 \times 89 + 5 \implies \mathrm{mdc}(717, 8) = \mathrm{mdc}(8, 5)$

em que $\mathrm{mdc}(8, 5) = 1$ por 5 ser um número primo que não divide o 8 (Lema 1.11, alínea 1).

5.1. O polinómio característico correspondente a

$$a_n = 379a_{n-1} - 378a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

é igual a

$$p(t) = t^2 - 379t + 378,$$

de raízes iguais a 1 e 378. Cada termo a_n da solução geral é então igual a

$$a_n = \alpha + \beta 378^n,$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad \alpha + 378\beta = a_1 = -377.$$

Ou seja, $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Consequentemente,

$$a_n = 1 - 378^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

5.2. Consequência do Exercício 3.1.1 da Atividade Formativa 2 para $a = 1$ e $b = 378$.

5.3. Tem-se $377 = 29 \times 13$, o que significa que 29 é um divisor de 377. Por outro lado, pela alínea anterior, 377 é um divisor de cada a_n. Logo, pelo Lema 1.1 (transitividade), 29 é também um divisor de cada a_n, $n \in \mathbb{N}$. Sendo 29 um número primo, resulta então do Lema 1.11 alínea 1 que $\text{mdc}(a_n, 29) = 29$, $n \in \mathbb{N}$.

5.4. De modo semelhante conclui-se que $\text{mdc}(a_n, 13) = 13$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o que implica que cada fração $\frac{a_n}{13}$, $n \geq 1$, é redutível.