

**U.C. 21002**  
**Álgebra Linear I**  
**26 de julho de 2019**

- O exame é composto por **6** grupos de questões e respetivas alíneas, contém 3 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) **deverão ser respondidas no enunciado**.
- As questões dos grupos **II** a **VI** deverão ser respondidas no Caderno de Prova.
- Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

**CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO**

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados  $\frac{1}{3}$  valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. A cotação das restantes questões é a seguinte:

<b>II</b>	<b>III</b>	<b>IV</b>	<b>V</b>	<b>VI</b>
3.0 val.	3.0 val.	4.0 val.	4.0 val.	2.0 val.

Nome: .....

Nº de Estudante: ..... B. I./C.C. nº .....

Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando  $\times$  no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

**Questão 1**

Seja  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ .

Então:

- a)  $A$  não é invertível.
- b)  $\det A = 24$ .
- c)  $\det(2A) = 24$ .
- d)  $\det(-A) = -\det A$ .

**Questão 2**

Considere  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $f(x, y, z) = (x - y, z)$  e  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $g(1, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  e  $g(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Então:

- a)  $\text{Nuc } f = \langle (1, 0, 1) \rangle$ .
- b)  $g(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- c)  $(g \circ f)(1, 0, 0) = I_2$ .
- d)  $\text{Nuc } f = \text{Nuc } (g \circ f)$ .

**Questão 3**

Seja  $A$  uma matriz quadrada tal que  $A^2 = 5A$ . Então:

- a)  $\det A = 5$ .
- b) 0 ou 5 são valores próprios de  $A$ .
- c)  $A$  é invertível.
- d)  $\det A = 1$ .

Nome: .....  
Nº de Estudante: ..... B. I./C.C. nº .....  
Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

#### Questão 4

Seja  $F$  o subespaço linear de  $\mathbb{R}^4$  definido por  
 $F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2z - w = 0 \wedge x + y + 3z = 0\}$ . Então:

- a)  $\dim F = 3$ .
- b)  $((2, -2, 0, 2), (2, 1, -1, 0))$  é uma base de  $F$ .
- c)  $(1, 3 - 2, -4) \in F$ .
- d)  $F = \langle (1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1) \rangle$ .

#### Questões de desenvolvimento

RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTE NO CADERNO DE PROVA

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

**II.** Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  é tal que  $A^2 - 2A = I_n$  então 2 é valor próprio de  $A$ .

b) Se  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  é tal que  $AA^T = I_n$  então  $A$  é invertível.

**III.** Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 3 \\ 2x + 7y + 3z = -7 \\ x + 4y + 3z = -2 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e indicando claramente todas as operações que efetuar, discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Nome: .....  
Nº de Estudante: ..... B. I./C.C. nº .....  
Turma ..... Assinatura do Vigilante: .....

---

IV. Seja  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

- Determine os valores próprios da matriz  $A$ .
- Determine os espaços próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea anterior.
- Mostre que existe uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

V. Considere a aplicação  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  definida por  $T(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y & y - z \\ x + z & x + y \end{pmatrix}$ .

- Mostre que  $T$  é uma aplicação linear.
- Determine o núcleo de  $T$ .
- Determine a dimensão da imagem de  $T$ .
- Determine se  $T$  é injetiva, e se  $T$  é sobrejetiva.
- Considerando as bases canónicas em  $\mathbb{R}^3$  e em  $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  determine a matriz que representa  $T$ .

VI. Sejam  $A$  e  $B \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  matrizes invertíveis. Mostre que  $\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A)$ .  
(Recorde que se  $X$  é uma matriz invertível então  $X^{-1} = \frac{\text{adj } X}{\det X}$ )

FIM