Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 5 a 13 de abril de 2021

Data de Limite de Entrega

13 de abril de 2021, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Combinatória Enumerativa

Trabalho a desenvolver

Resolução dos 5 grupos de exercícios constantes no enunciado.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com exceção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorreta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**
0.8 val.	**2.3** val.

Normas a respeitar

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira e Ana Nunes

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Seja X um subconjunto enumerável de $\mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(i) $X \times \mathbb{Q}$ é enumerável

(ii) $X \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$ é enumerável

(iii) $X \subseteq \mathbb{Z}$

A lista completa de afirmações verdadeiras é a seguinte:

A) (iii)

B) (i) e (iii)

C) (i) e (ii)

D) (i), (ii) e (iii)

2. Pretende-se sentar em fila 6 crianças, que designamos por A, B, C, D, E, F. Considere as seguintes afirmações:

(i) O número de maneiras que podemos sentar as 6 crianças de modo que A e B fiquem sempre juntas é $5! \times 2!$

(ii) O número de maneiras que podemos sentar as 6 crianças de modo que A e B fiquem sempre juntas e que E e F fiquem sempre juntas é $\frac{6!}{4! \times 2! \times 2!}$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

3. O número de maneiras para distribuir 13 cd's iguais e 7 livros distintos por 5 pessoas é igual a

A) $\binom{20}{5}$

B) $\frac{17!}{13!4!} \times 5^7$

C) $\frac{17!}{13!4!} \times 7^5$

D) $\sum_{k=0}^{5} \binom{13}{k} \binom{7}{5-k}$

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

4. O problema “com 5 homens e com 5 mulheres, de quantas maneiras se pode formar um casal?” foi resolvido por um estudante da seguinte maneira:

A primeira pessoa do casal pode ser escolhida de 10 maneiras, pois pode ser homem ou mulher. Escolhida a primeira pessoa, a segunda só poderá ser escolhida de 5 modos, pois deve ser de sexo diferente do da primeira pessoa. Há, portanto, $10 \times 5 = 50$ *maneiras diferentes de formar um casal.*

Analise esta resposta e, caso necessário, corrija-a.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere a soma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n.$$

5.1. Mostre que

$$S_n = -nS_{n-1} + n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

5.2. Sabido que

$$\sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{N}{k} k^m = 0$$

sempre que $N > m \geq 0$, prove que

$$S_n = (-1)^n n!, \quad n \geq 1$$

por recurso ao método de indução matemática.

5.3. Mostre que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (m+k)^n = (-1)^n n!$$

FIM