Grupo I:

1. Os valores próprios de A são as soluções de $p(\lambda)=0$, e portanto são $\lambda = 1, -1, -1$.

   Uma vez que A é triangular sabemos que os elementos da diagonal principal de A são os valores próprios de A, e portanto $\operatorname{tr} A = 1-1-1=-1$, e $\det A = 1\times(-1)\times(-1) = 1$.

   $\lambda=1$ tem multiplicidade algébrica 1, e portanto também tem multiplicidade geométrica 1.

   $\lambda=-1$ tem multiplicidade algébrica 2, e portanto a sua multiplicidade geométrica pode ser 2 ou 1.

   A resposta correta é b).

2. Por definição $\operatorname{Nuc}(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=0\}$ e portanto $\operatorname{Nuc} f = \{(0,0)\}$ (por abuso de linguagem, escrevemos por vezes $\operatorname{Nuc} f = (0,0)$, o que não é muito correto.)

   A dimensão da imagem de f é $\dim \operatorname{Im} f = 2 - \dim \operatorname{Nuc} f = 2$.

   A imagem de f e o núcleo de f são subespaços de espaços diferentes, portanto não podem ser iguais.

   A resposta correta é a).

3. A aplicação linear $g(x,y,t,w) = (x,y,0)$ não satisfaz a), c) e d).

   Por linearidade b) é verdadeira para qualquer aplicação linear.

4. Tem-se $\det(A_\alpha - \lambda I_2) = (1-\lambda-\alpha)(1-\lambda+\alpha)$ e portanto os valores próprios de A_α são $1-\alpha$ e $1+\alpha$.

   Se $\alpha=0$ há apenas o valor próprio 1.

   Se $\alpha\neq 0$ há sempre 2 valores próprios distintos.

   Se $\alpha=1$ os valores próprios são 0 e 2.

   A resposta correta é c).

Grupo II:

i) Tem-se $T(1,0,1) = x^2 = (x^2+x) - x + 0(x+1)$,

$T(1,1,1) = x^2+x+1 = (x^2+x) - x + (x+1)$,

$T(1,1,0) = x^2+x+1 = (x^2+x) - x + (x+1)$,

e portanto

$$A = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

ii) Sabemos que $\mathcal{M}(T;\mathcal{B},\mathcal{B}'') = \mathcal{M}(id;\mathcal{B}',\mathcal{B}'')\mathcal{M}(T;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ e portanto em cada coluna de Q vão estar as coordenadas, na base $\mathcal{B}''$, de cada elemento de $\mathcal{B}'$.

Tem-se $x^2+x = 1.(x-1) + 0(x^2+x-1) + 1.(x^2+1)$,

$x = 2.(x-1) - 1.(x^2+x-1) + 1.(x^2+1)$,

$x+1 = 3.(x-1) - 2(x^2+x-1) + 2(x^2+1)$, e portanto

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ e finalmente } \quad QA = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os valores que aparecem nas colunas de Q podem obter-se resolvendo $x^2+x = a(x-1) + b(x^2+x-1) + c(x^2+1)$, para a 1ª coluna, ou seja $\begin{cases} 1 = b+c \\ 1 = a+b \\ 0 = -a-b-c \end{cases}$, e de modo análogo para as outras 2 colunas.

Grupo III:

i) Os valores próprios de C são as soluções de $\det(C - \lambda I_4) = 0$

$$\det(C-\lambda I_4) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \underset{\ell 1}{\overset{Lap.}{=}} -\lambda(3-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - (3-\lambda)(2-\lambda) =$$

$= (3-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-1)$, e portanto os valores próprios são $-1, 1, 2$ e 3.

Usando a coluna 2 ainda era mais rápido:

$$\det(C-\lambda I_4) \underset{c2}{\overset{Lap.}{=}} (3-\lambda)\det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(\lambda^2-1).$$

ii) O espaço próprio associado a $\lambda = -1$ é obtido resolvendo $(C + I_4)X = 0$, ou seja $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$, cujas soluções são o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 23/12 \\ -2/3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Analogamente o espaço próprio associado a $\lambda = 1$ é o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 11/2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

O espaço próprio associado a $\lambda = 2$ é o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

O espaço próprio associado a $\lambda = 3$ é o subespaço gerado por $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

iii) Os valores próprios têm todos multiplicidade algébrica 1 e portanto (porquê?) também têm multiplicidade geométrica 1.

Grupo IV:

Para mostrar que a expressão dada é válida convém ver que faz sentido, ou seja que $(M - \lambda I_n)$ é invertível, e que $\mu - \lambda \neq 0$.

Se λ não é valor próprio de M então $M - \lambda I_n$ é invertível (porquê?).

Tem-se $(M - \lambda I_n) u = Mu - \lambda u = \mu u - \lambda u = (\mu - \lambda) u$ e portanto $(M - \lambda I_n)^{-1} \cdot (M - \lambda I_n) u = (M - \lambda I_n)^{-1} \cdot (\mu - \lambda) u$, ou seja $u = (\mu - \lambda)(M - \lambda I_n)^{-1} u$, o que equivale (porquê?) a $\dfrac{1}{\mu - \lambda} u = (M - \lambda I_n)^{-1} u$.