21002 - Álgebra Linear I

Ano lectivo 2015/16

Docente: António Araújo

e-fólio A (20 a 30 de novembro)

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 6 grupos de questões e termina com a palavra FIM.
- Depois de ter realizado o e-Fólio produza um único documento digital (em formato pdf), incluindo obrigatoriamente esta folha de rosto e a página com as questões de escolha múltipla, e insira-o, na página moodle da unidade curricular, em "e-Fólio A" até ao dia limite referido no topo desta página.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Assegure-se de que o seu trabalho está legível.
- Recorde que o e-fólio é um trabalho individual.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Por cada resposta errada serão descontados 0.25 valores. É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta. A classificação mínima do Grupo I é de 0 valores. Os Grupos II a VI têm cotação de 0.6 valores cada.

Por favor preencha os seus dados:

- Nome:
- B.I:
- Nº de Estudante'
- Curso:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respetivo.

I. Questões de escolha múltipla.

1. No espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ considere os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned}
\text{(i) } A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\} \\
\text{(ii) } B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\} \\
\text{(iii) } C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}
\end{aligned}$$

Então:

☐ a) A, B, e C são todos subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.
☒ b) Apenas A é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
☐ c) Apenas A e B são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$.
☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

Solução: Recordamos que pelo critério de Subespaço Vectorial (ver página 187 da 4ª edição do manual) temos que F é subespaço de E sse
1) $F \subseteq E$
2) $0_E \in F$
3) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$
4) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$

Vamos ver se estas condições de verificam para cada um dos conjuntos A, B, C.

A: É fácil verificar que (1-4) verificam-se para os vectores com $x = 0$. Por exemplo, para a condição (3), temos que $(0, y, z)+(0, y', z') = (0, y+y', z+z')$, que ainda é um vector com a primeira coordenada igual a zero. As outras condições ficam a cargo do estudante. Portanto A é subespaço vectorial.
B: Os vectores $(x, 0, z)$ e $(0, y', z')$ com $x \neq 0$ e $y' \neq 0$ estão ambos em B. No entanto o vector soma $(x, y', z + z')$ não está em B. Então B não verifica (3) e não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^3$.
C: Verificamos que mais uma vez a condição (3) falha, utilizando os mesmo vectores que no caso B.
Então verifica-se a opção (b): Apenas A é subespaço vectorial.

2. Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ duas matrizes tais que $\det(AB) = -1$. Então:

☐ a) $\det A = -\det B$.

☐ b) $\det(A) = -1$ ou $\det(B) = -1$.
☒ c) A é invertível.
☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

Solução: Sabemos que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Então, se $\det(AB) = -1$, nenhuma das matrizes pode ter determinante nulo, portanto são ambas invertíveis, e em particular A é invertível, pelo que (c) é verdadeira. As outras respostas não são verdadeiras porque é sempre possível encontrar um contra-exemplo: por exemplo, é possível que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = -1/2$, e isto verificaria a hipótese $\det(AB) = -1$ mas sem verificar a) nem b).

3. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e diga qual das seguintes afirmações é verdadeira.

☐ a) $AB - BA = 0$.
☒ b) $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
☐ c) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
☐ d) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$

Solução: Por cálculo directo (a cargo do estudante) verificamos que $AB - BA \neq 0$. Então (a) é falsa. Mas (c) e (d) são verdadeiras se e só se as matrizes comutam, pelo que são ambas falsas neste caso. Verificamos que a (b) é verdadeira por cálculo directo (a cargo do estudante).

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$$

e sejam B e C matrizes $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $AB = C$. Então

☐ a) C é invertível.
☐ b) $\det C = 1$.
☒ c) $\det C = 0$.
☐ d) A é invertível.

Solução: É fácil de ver que a terceira linha de A é a soma das duas primeiras. Então A não é invertível, pelo que (d) é falsa. Então $\det A = 0$, e portanto $\det C = \det AB = \det A \det B = 0$, pelo que (c) é a única afirmação verdadeira.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere o sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4s + 2t = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5s + 4t = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4s + 7t = 22 \end{cases}$$

Utilizando o método de eliminação de Gauss e indicando clara e pormenorizadamente todas as operações que efetuar, discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

Solução:

Escrevemos o sistema na forma matricial $AX = B$ e aplicamos o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & -5 & 4 & 9 \\ 5 & -10 & -5 & -4 & 7 & 22 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-3\ell_1+2\ell_2 \\ -5\ell_1+2\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -25 & 12 & 4 & 24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-5\ell_2+\ell_3]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 3 & -4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 & -6 \end{array}\right]$$

Como $r(A) = 3 = r([A|B]) < 5$=número de incógnitas, o sistema é possível indeterminado, com grau de indeterminação 5-3=2.

As incógnitas livres são z e t. Resolvendo para x, y, s, temos

$$x = 26 + 11z - 15t, \ y = 12 + 5z - 8t, \ s = -3 + 3t$$

O conjunto solução é

$$\begin{aligned} C &= \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbb{R}^5 : a_1 = 26 + 11a_3 - 15a_5, \ a_2 = 12 + 5a_3 - 8a_5, \ a_4 = -3 + 3a_5\} \\ &= \{(26 + 11a_3 - 15a_5, 12 + 5a_3 - 8a_5, a_3, -3 + 3a_5, a_5), a_3, a_5 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:
Aplicamos o teorema de Laplace à segunda linha:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(\ell_2)}{=} 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 1(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace à terceira coluna do primeiro determinante obtemos

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(c_3)}{=} 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(c_1)}{=} 2 \cdot 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

Calculamos de seguida o segundo determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(c_2)}{=} 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Note-se que agora já podíamos usar a regra de Sarrus; ou podemos usar o teorema de Laplace para reduzir ambas as matrizes a matrizes de 2 por 2:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(\ell_2)}{=} 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} 5(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -1(3 - 2 \cdot 3) + 2(5 - 2 \cdot 3) - 5(5 \cdot 3 - 3 \cdot 3) = -29$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} \underset{Lap(\ell_2)}{=} 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} 4(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2(3-2\cdot 3) + 1(5-2\cdot 3) - 4(5\cdot 3 - 3\cdot 3) = -19$$

Então

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2(-29) - 2(-19) = -20$$

e finalmente

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 + 20 = 8.$$

IV. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} kx + y + z = & 1 \\ x + ky + z = & 1 \\ x + y + kz = & 1 \end{cases}$$

Calcule o determinante da matriz simples do sistema. Diga, justificando, para que valores de k é que o sistema é determinado, indeterminado, e impossível.

Solução: Temos que

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3 + 1 + 1 - k - k - k = k^3 - 3k + 2 = (k-1)^2(k+2)$$

(onde, por inspecção, notámos que $k = 1$ é raíz (dupla) do polinómio obtido por cálculo do determinante)

O sistema é determinado quando o determinante não se anula, ou seja, quando $k \neq \{-2, 1\}$.

Quando k=-2, fazendo as operações $L_1 \to L_1 + 2L_3$ e $L_2 \to L_2 + -L_3$ obtemos a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

de onde tiramos as equações $y - z = 1$ e $y - z = 0$, pelo que o sistema é impossível.

Quando $k = 1$ todas as linhas da matriz são iguais e correspondem à equação $x+y+z = 1$, pelo que o sistema é indeterminado, tendo um número infinito de soluções; para cada escolha de x e y temos uma solução dada por $z = 1 - x - y$.

V. Diga, justificando, se os seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

i) $\{(x, y, z, w) : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\}$
ii) $\{(x, y, z, w) : x^2 - y^2 = 0\}$
iii) $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 1\}$
iv) $\{(x, y, z, w) : x + y + z + w = 0\}$

Solução:

Recordemos mais uma vez o critério de Subespaço Vectorial: F é subespaço de E sse

1) $F \subseteq E$
2) $0_E \in F$
3) $u, v \in F \Rightarrow u + v \in F$
4) $\alpha \in \mathbb{K}, u \in F \Rightarrow \alpha u \in F$

i) Os vectores $(1, 0, 0, 0)$ $(0, 1, 0, 0)$ verificam ambos $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ mas a sua soma não verifica esta condição. Então o conjunto não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

ii) A condição $x^2 - y^2 = 0$ pode ser escrita na forma $(x + y)(x - y) = 0$. Consideremos os vectores $u = (1, 1, 0, 0)$ e $v = (1, -1, 0, 0)$. O primeiro verifica a condição porque anula o factor $x - y$ (mas não o $x + y$) e o segundo verifica a condição porque anula $x + y$ (mas não $x - y$). Mas o vector $u + v = (2, 0, 0, 0)$ não verifica a condição pois não anula nenhum dos factores. Então o conjunto não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

iii) $(0, 0, 0, 0)$ não verifica $x + y + z + w = 1$ portanto o conjunto não é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$.

iv) O conjunto é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^4$ (é na verdade um hiperplano de $\mathbb{R}^4$ que passa na origem), pois verifica as quatro condições do critério de subespaço vectorial:

1) é verificada trivialmente, porque o conjunto é dado pelos elementos de $\mathbb{R}^4$ que satisfazem uma dada equação.

2) é verificada pois $0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

3) Se $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, w_2)$ verificam ambos a condição $x + y + z + w = 0$ então

$$\begin{aligned} &(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) + (w_1 + w_2) \\ =&(x_1 + y_1 + z_1 + w_1) + (x_2 + y_2 + z_2 + w_2) \\ =&0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

pelo que a $u + v$ verifica a condição.

4) Se $u = (x_1, y_1, z_1, w_1)$ verifica a condição $x + y + z + w = 0$ então

$$\alpha x_1 + \alpha y_1 + \alpha z_1 + \alpha w_1 = \alpha(x_1 + y_1 + z_1 + w_1) = \alpha \cdot 0 = 0$$

pelo que αu verifica a condição.

VI. Seja $A \in M_{n\times n}$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = A^T$. Mostre que $\det(A^2) = 1$.

Solução:

$$\begin{aligned}\det A^2 &= (\det A)^2 = \det A \det A = \det A^T \det A \overset{hip.}{=} \det A^{-1} \det A \\ &= \det(A^{-1}A) = \det I_n = 1.\end{aligned}$$

onde além da hipótese usámos as igualdades $\det A = \det A^T$ e $\det AB = \det A \det B$.

FIM