UNIDADE CURRICULAR: Matemática Finita

CÓDIGO: 21082

DOCENTES: Gilda Ferreira e Ana Nunes

Resolução e Critérios de Correção

1. O Francisco convidou 5 colegas para irem com ele ao cinema. Comprou 6 bilhetes com numeração seguida numa determinada fila. Ao chegarem à sala apercebeu-se que dois deles (o João e o Fernando) estavam incompatibilizados. De quantas maneiras diferentes se podem sentar de modo a que o João e o Fernando não fiquem lado a lado e o lugar do João tenha numeração mais baixa do que o lugar do Francisco? (Escolha a opção correta)

a) 240
b) 720
c) 480
d) Nenhuma das opções anteriores

Resolução: a)

2. Sejam f e g funções tais que f é bijetiva e $f \circ g$ é sobrejetiva. Nestas condições: (Escolha a opção correta)

a) A função g é injetiva
b) A função $f \circ g$ é injetiva
c) A função g é não injetiva
d) Nenhuma das opções anteriores

Resolução: d)

3. Seja X um conjunto finito. Relativamente à cardinalidade de $X \cup (X \times \{a\})$ podemos afirmar que: (Escolha a opção correta)

a) Se $a \in X$ então $\#(X \cup (X \times \{a\})) = \#X$

b) Se $a \notin X$ então $\#(X \cup (X \times \{a\})) = \#X + 1$

c) Quer $a \in X$ quer $a \notin X$ temos que $\#(X \cup (X \times \{a\})) = 2 \cdot (\#X)$

d) Quer $a \in X$ quer $a \notin X$ temos que $\#(X \cup (X \times \{a\})) = \#X$

Resolução: c)

4. Prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tem $(x+1)^n \geq 1 + nx$ com $x \geq 0$.

(a) Pelo método de indução matemática.

Resolução: Provemos o resultado $\forall n \in \mathbb{N},\ (x+1)^n \geq 1+nx$ com $x \geq 0$, usando o princípio de indução matemática.

Caso base: Provemos que o resultado é válido para $n = 0$:

$(x+1)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$. Logo o resultado é válido para $n = 0$.

Passo de indução: Provemos que, para todo o $k \in \mathbb{N}$, se o resultado é válido para k então é válido para $k+1$. Tomemos $k \in \mathbb{N}$ arbitrário e suponhamos, por hipótese de indução, que o resultado é válido para k, i.e. supomos que $(x+1)^k \geq 1 + kx$. Queremos provar que $(x+1)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$.

Ora, $(x+1)^{k+1} = (x+1)^k(x+1) \overset{H.I.}{\geq} (1+kx)(x+1) = 1+kx+x+kx^2 = 1+(k+1)x+kx^2 \geq 1+(k+1)x$. Na penúltima desigualdade usa-se, para além da H.I., o facto de sabermos que $x+1$ é positivo visto $x \geq 0$. A última desigualdade resulta do facto de sabermos que kx^2 é não negativo.

Logo, pelo princípio de indução matemática, provámos que $\forall n \in \mathbb{N},\ (x+1)^n \geq 1 + nx$ com $x \geq 0$.

(b) Usando uma igualdade binomial.

Resolução:

$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \underbrace{\binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n}_{\geq 0} \geq$

$\binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 = 1 + nx$.

A desigualdade resulta do facto de sabermos que $x^k \geq 0,\ k = 2, \ldots, n$ visto $x \geq 0$.

Cotações: 4(a): 0,6 valores (Base: 0,1; Hip. Ind: 0,05; Tese Ind: 0,05; Passo: 0,35; Conclusão: 0,05); 4(b): 0,4 valores

5. Entre 120 alunos que frequentam o mesmo colégio e que têm ao seu dispôr três atividades extra-curriculares, 20 fazem ballet, 80 têm música e 40 praticam natação. Sabe-se ainda que um aluno que tenha ballet não tem mais nenhuma atividade extra-curricular e que há exatamente 30 alunos que estão simultaneamente na música e na natação.

(a) Há alunos sem nenhuma atividade extra-curricular? Se sim, indique quantos. Se não, justifique.

Resolução: De entre os 120 alunos considerados, designemos por B, M e N respetivamente o conjunto dos alunos que pratica Ballet, que tem música, que pratica natação.

O conjunto $B \cup M \cup N$ corresponde ao conjunto de alunos que tem alguma atividade extra-curricular, pelo que $120 - \#(B \cup M \cup N)$ nos dá o número pretendido, ou seja, o número de alunos sem atividade-extracurricular.

Ora, $\#(B \cup M \cup N) = \#B + \#M + \#N - \#(B \cap M) - \#(B \cap N) - \#(M \cap N) + \#(B \cap M \cap N) = 20 + 80 + 40 - 0 - 0 - 30 + 0 = 110$.

Concluímos assim que há $120 - 110 = 10$ alunos sem atividade extra-curricular.

(b) Quantas maneiras distintas existem de distribuir 25 barras energéticas (todas iguais) pelos alunos que praticam ballet sendo que cada aluno tem de ficar com pelo menos uma barra?

Resolução: Há várias demonstrações possíveis. Apresentamos três alternativas.

• Sendo X o conjunto de todas as barras, $\#X = 25$, e Y o conjunto dos alunos que têm ballet, $\#Y = 20$, teremos que considerar todas as funções sobrejetivas com os elementos de X indistinguíveis e os elementos de Y distinguíveis (entrada 6 da Tabela dos Doze Caminhos). Logo existem $\binom{25-1}{20-1} = \binom{14}{19} = \frac{24!}{19!\,5!} = 42504$ possibilidades.

• Havendo 25 barras e considerando que cada um dos 20 alunos terá de ter uma barra, sobram apenas 25-20=5 barras para distribuir. Sendo X o conjunto das barras restantes $\#X = 5$, e Y o conjunto dos alunos que têm ballet, $\#Y = 20$, temos que considerar todas as funções com os elementos de X indistinguíveis e os elementos de Y distinguíveis (entrada 4 na Tabela dos Doze Caminhos). Logo existem $\binom{5+20-1}{5} = \binom{24}{5} = \frac{24!}{5!\,19!} = 42504$ possibilidades.

• Havendo 20 alunos que praticam ballet e sabendo que cada aluno fica com pelo menos uma barra, distribuímos uma barra por cada aluno e restam apenas 5 barras para distribuirmos pelos alunos de Ballet sem qualquer restrição. Podemos pensar em colocar as 5 barras numa fila e 20-1=19 separadores que indicam com que aluno(s) essas barras ficarão. O número de maneiras diferentes de colocar 19 separadores numa fila de 19+5=24 elementos é $\binom{24}{19} = \frac{24!}{19!\ 5!} = 42504$.

Cotação: 5(a): 0,5 valores ($\#(\overline{B \cup M \cup N}) = 120 - \#(B \cup M \cup N)$: 0,1; fórmula da cardinalidade da união: 0,05; aplicação desta última fórmula: 0,25; conclusão 0,1). 5(b) 0,5 valores.

6. Usando uma das igualdades binomiais estudadas, prove que existe $x \in \mathbb{N}$, tal que

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \ldots + 2^n\binom{n}{n} = x^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Resolução: Temos que

$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\ldots+2^n\binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k 1^{n-k} \overset{\text{Binóm. Newton}}{=} (2+1)^n = 3^n$.

Provámos assim que existe $x = 3 \in \mathbb{N}$ nas condições pretendidas.

Cotação: 0,6 valores (conhecer o Binómio de Newton: 0,1; aplicá-lo corretamente: 0,5)

7. Suponha que existem duas funções injetivas $f : \mathbb{N} \to X$ e $g : X \to \mathbb{N}$. Será X um conjunto enumerável? Se sim prove, se não justifique.

Resolução: Com aritmética cardinal seria muito simples provar que X era um conjunto enumerável. Com os resultados do manual havia também várias formas de o fazerem. Apresentamos aqui duas dessas possíveis resoluções.

• Como $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito e $f : \mathbb{N} \to X$ é uma função injetiva temos que X é um conjunto infinito.

Como $g : X \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva temos que a função $\tilde{g} : X \to g(X) \subseteq \mathbb{N}$ (função que coincide com g mas cujo conjunto de chegada é $g(X)$) é bijetiva. Sendo X conjunto infinito concluímos que $g(X)$ é conjunto infinito.

Sabemos que todo o subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ tem cardinalidade χ_0, logo $g(X)$ tem cardinalidade χ_0, ou seja, $g(X)$ é numerável, isto é, existe uma bijeção entre $g(X)$ e $\mathbb{N}$. Seja s tal bijeção. A função composta $s \circ \tilde{g} : X \to \mathbb{N}$ é uma bijeção. Logo X é numerável. Sabemos que um conjunto infinito é numerável se e somente se for enumerável. Logo X é enumerável.

• Como $g : X \to \mathbb{N}$ é uma função injetiva temos que a função $\tilde{g} : X \to g(X) \subseteq \mathbb{N}$ (função que coincide com g mas cujo conjunto de chegada é $g(X)$) é bijetiva.

A função inversa $\tilde{g}^{-1} : g(X) \to X$ é obviamente uma função bijetiva.

Como $f : \mathbb{N} \to X$ é uma função injetiva temos que X é um conjunto não vazio. Fixemos $m \in X$. Seja $h : \mathbb{N} \to X$ a função definida por

$$h(n) = \begin{cases} \tilde{g}^{-1}(n) & \text{se } n \in g(X) \\ m & \text{se } n \notin g(X) \end{cases}$$

Provemos que a função h é sobrejetiva. Seja $x \in X$ arbitrário. Tomemos $\tilde{g}(x) \in g(X) \subseteq \mathbb{N}$. Temos que $h(\tilde{g}(x)) = \tilde{g}^{-1}(\tilde{g}(x)) = x$.

Logo h é sobrejetiva.

Provámos assim que X (conjunto não vazio) é imagem sobrejetiva do conjunto dos números naturais. Concluímos que X é enumerável.

Cotação: 0,5 valores (conhecer a noção de conjunto enumerável: 0,1; provar que é enumerável: 0,4)

FIM