QUESTÃO 1. $A = \{a, b, c, d, \cdots, x, y, z\}$

5 letras 1ª letra e última letra vogais. distintas

e as restantes consoantes diferentes

vogais $= \{a, e, i, o, u\}$

No alfabeto português tem-se 21 consoantes e 5 vogais.

Consoantes = 26 letras − 5 vogais
= 21 consoantes.

$$\underset{a,e,i,o,u}{\underline{5}} \times \underline{21} \times \underset{\substack{-1 \\ \text{que já} \\ \text{foi} \\ \text{usada}}}{\underline{20}} \times \underset{\substack{-2 \\ \text{que} \\ \text{já} \\ \text{foram} \\ \text{usadas}}}{\underline{19}} \times \underline{4}$$

4 vogais menos a que já foi usada.

Pelo princípio multiplicativo tem-se:

$$5 \times 21 \times 20 \times 19 \times 4 = 159600$$

Existem 159600 sequências com 5 letras que se podem formar de modo a que a primeira e última letra sejam vogais distintas e que as restantes sejam consoantes todas distintas.

QUESTÃO 2.
$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}$$
$$\text{I} \qquad\qquad \text{II}$$

I Pelo o teorema binomial tem-se que

$$\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k} = (1-3)^n = (-2)^n$$

$$\left((-2)^n\right)^4 = (-2)^{4n} = 2^{4n}$$ (4n é par logo quadrado de par dá número positivo)

II pelo teorema binomial tem-se que

$$\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k} = (1+1)^{4n} = (2)^{4n} = 2^{4n}$$

logo $2^{4n} = 2^{4n}$, portanto

$$\left(\sum_{k=0}^{n}(-3)^{n-k}\binom{n}{k}\right)^4 = \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}$$

QUESTÃO 3. valores de a para os quais existem soluções inteiras

$$3827x + 1634y = a$$

tem-se que $ax + bx = c$ possui soluções com $x, y \in \mathbb{Z}$
se e só se $mdc(a,b) \mid c$ (Corolário 1.8)

neste caso a equação diofantina acima só tem soluções inteiras se

$$mdc(3827, 1634) \mid a$$

~~...~~ Aplicando o algoritmo de Euclides sucessivamente tem-se

$3827 = 1634 \times 2 + \boxed{559}$ → $mdc(3827, 1634) = mdc(1634, 559)$

~~...~~
$mdc(1634, 559)$ ~~...~~ $1634 = 559 \times 2 + \boxed{516}$ $= \{mdc(1634, 559) = mdc(559, 516)$

$mdc(559, 516)$ $559 = 516 \times 1 + \boxed{43}$

$mdc(559, 516) = mdc(516, 43)$

$516 = 43 \times 12 + 0$

$mdc(516, 43) = mdc(43, 0)$

logo $mdc(3827, 1634) = 43$ logo $43 \mid a$

~~...~~ $43 \mid a$ quando os valores de a são múltiplos de 43.

~~R~~ Os valores de a para os quais existem soluções inteiras para a equação dada são todos os múltiplos inteiros de 43.

QUESTÃO 4.1 $a_n = 535a_{n-1} - 2124a_{n-2}$ $n \geq 2$

$a_0 = 0$ $a_1 = 527$

Base $n=0$

$a_0 = 0$

$0 \in \mathbb{Z}$ ✓

Base para $n=1$

$a_1 = 527$

$527 \in \mathbb{Z}$ ✓

Hipótese ~~para~~

Suponha-se para algum $n \in \mathbb{N}$ fixo que $a_m \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{N} : m \leq n$

tese $a_{n+1} \in \mathbb{Z}$, n é o n fixado na hipótese

Passo indutivo

$$a_{n+1} = 535a_{(n+1)-1} - 2124a_{(n+1)-1}$$

$$a_{n+1} = 535a_n - 2124a_{n-1}$$

pela hipótese de indução tem-se que

a_n e a_{n-1} $\in \mathbb{Z}$

logo $535a_n$ e $2124a_{n-1}$ $\in \mathbb{Z}$

portanto $a_{n+1} = 535a_n - 2124a_{n-1} \in \mathbb{Z}$

Conclusão: Por indução completa fica demonstrado que

$a_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

4.2. $a_n, n \in \mathbb{N}$ $\quad a_n = 535\, a_{n-1} + 2124\, a_{n-2} \quad n \geq 2$

$p(t) = t^2 - 535t + 2124$

$p(t) = 0 \iff t^2 - 535t - 2124 = 0 \Rightarrow t = \frac{535 \pm \sqrt{(535)^2 - 4.2124}}{2}$

$\Rightarrow t = \frac{535 \pm \sqrt{286225 - 8496}}{2} \iff t = \frac{535 \pm 527}{2} \iff t = 4 \vee t = 531$

$a_n = \alpha\, 4^n + \beta\, 531^n$, por $a_0 = 0$ e $a_1 = 527$ tem-se o seguinte sistema:

$\begin{cases} 4^0\alpha + 531^0\beta = 0 \\ 4^1\alpha + 531^1\beta = 527 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\beta \\ 4(-\beta) + 531\beta = 527 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\beta \\ 527\beta = 527 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = -\beta \\ \beta = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$

$\boxed{a_n = 531^n - 4^n}$ $n \in \mathbb{N}$

4.3. Cada a_n, $n \in \mathbb{N}$, é um múltiplo de 31.

531 : 31 deixa resto 4

$a_n = 531^n - 4^n$ note-se que $531 \equiv 4 \pmod{31}$

pela lei da potenciação

$531^n \equiv 4^n \pmod{31}$

$531^n - 4^n \equiv 0 \pmod{31}$ o que resulta $531^n - 4^n = a_n$

logo $531^n - 4^n$ é múltiplo de 31.

4.4. determinar $mmc(a_n, 17)$, $n \in \mathbb{N}$

$a_n = 531^n - 4^n$ ~~se a_n é múltiplo de~~

prove-se que a_n é multiplo de 17

note-se que $531 \equiv 4 \pmod{17}$

$531^n \equiv 4^n \pmod{17}$

$531^n - 4^n \equiv 0 \pmod{17}$

logo $531^n - 4^n$ é múltiplo de 17.

Se $531^n - 4^n$ é multiplo de 17 então $mmc(a_n, 17) = a_n$, pela proposição 1.13 em que $mdc(a,b) \cdot mmc(a,b) = a \cdot b$. ⊕

⊕ como $17 | a_n$ então $mdc(a_n, 17) = 17$

logo $mdc(a_n, 17) \cdot mmc(a_n, 17) = a_n \times 17$

$\Rightarrow mmc(a_n, 17) = a_n$