

”

E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio



Investigação Operacional | 21076

Nome: João Manuel Pacheco Seco Marques

N^o de Estudante: 2403882

Curso: Licenciatura Eng Informática

Turma: Turma 4

Data: 24/05/2026

Ano Lectivo: 2025/2026

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Joana Russo

Resolução Exercício 1:

Identificação do Modelo e Parâmetros

De acordo com o enunciado, em um call center, as chamadas chegam de forma aleatória (Poisson) e o tempo de atendimento é exponencial, existindo múltiplos servidores (c) a trabalhar em paralelo. Está-se, portanto, perante um Sistema de Filas de Espera M/M/ c .

Parâmetros do sistema:

- **Taxa média de chegadas (λ):**
1 chamada a cada 10 minutos $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{10} = 0,1$ chamadas/minuto.
- **Taxa média de serviço (μ):**
1 chamada a cada 9 minutos $\Rightarrow \mu = \frac{1}{9}$ chamadas/minuto.
- **Tráfego oferecido (r):** $r = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,1}{1/9} = 0,9$.
- **Fator de utilização do sistema (ρ):** $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{r}{c} = \frac{0,9}{c}$.

Para que o sistema seja estável (a fila não cresce infinitamente), é obrigatório que $\rho < 1$, o que implica $c > 0,9$. Como o número de servidores tem de ser um número inteiro, o valor mínimo possível para começar a testar é $c = 1$.

Fórmulas base do modelo M/M/ c :

1. **Probabilidade de o sistema estar vazio (P_0):** $P_0 = \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1}$
2. **Número médio de clientes na fila (L_q):** $L_q = \frac{P_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}$
3. **Tempo médio de espera na fila (W_q):** $W_q = \frac{L_q}{\lambda}$

Alínea a) :

Determinar o número mínimo de servidores (c) para que $W_q \leq 1$ minuto.

Como não existe uma fórmula inversa direta para isolar c , o método analítico correto consiste em testar valores inteiros crescentes para c até que a condição seja satisfeita.

Teste para $c = 1$ (Modelo M/M/1):

- $\rho = \frac{0,9}{1} = 0,9$
- $P_0 = \left[1 + \frac{0,9^1}{1!(1-0,9)} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{0,9}{0,1} \right]^{-1} = [1 + 9]^{-1} = 0,1$

- $L_q = \frac{0,1 \cdot 0,9^1 \cdot 0,9}{1!(1-0,9)^2} = \frac{0,081}{0,01} = 8,1$ clientes na fila.
- $W_q = \frac{8,1}{0,1} = 81$ minutos.
- *Conclusão:* $81 > 1$, logo 1 servidor não é suficiente.

Teste para $c = 2$:

- $\rho = \frac{0,9}{2} = 0,45$
- $P_0 = \left[\frac{0,9^0}{0!} + \frac{0,9^1}{1!} + \frac{0,9^2}{2!(1-0,45)} \right]^{-1} = \left[1 + 0,9 + \frac{0,81}{2(0,55)} \right]^{-1} = \left[1,9 + \frac{0,81}{1,1} \right]^{-1} = \left[\frac{2,9}{1,1} \right]^{-1} = \frac{11}{29} \approx 0,3793$
- $L_q = \frac{\frac{11}{29} \cdot 0,9^2 \cdot 0,45}{2!(1-0,45)^2} = \frac{\frac{11}{29} \cdot 0,3645}{2 \cdot 0,3025} = \frac{4,0095/29}{0,605} = \frac{4,0095}{17,545} \approx 0,2285$ clientes.
- $W_q = \frac{0,2285}{0,1} = 2,285$ minutos.
- *Conclusão:* $2,285 > 1$, logo 2 servidores ainda não são suficientes.

Teste para $c = 3$:

- $\rho = \frac{0,9}{3} = 0,3$
- $P_0 = \left[\frac{0,9^0}{0!} + \frac{0,9^1}{1!} + \frac{0,9^2}{2!} + \frac{0,9^3}{3!(1-0,3)} \right]^{-1} = \left[1 + 0,9 + \frac{0,81}{2} + \frac{0,729}{6(0,7)} \right]^{-1} = \left[2,305 + \frac{0,729}{4,2} \right]^{-1}$
- $P_0 = \left[\frac{2305}{1000} + \frac{729}{4200} \right]^{-1} = \left[\frac{9681+729}{4200} \right]^{-1} = \left[\frac{10410}{4200} \right]^{-1} = \frac{140}{347} \approx 0,4035$
- $L_q = \frac{\frac{140}{347} \cdot 0,9^3 \cdot 0,3}{3!(1-0,3)^2} = \frac{\frac{140}{347} \cdot 0,729 \cdot 0,3}{6 \cdot 0,49} = \frac{\frac{30,618}{347}}{2,94} = \frac{30,618}{1020,18} \approx 0,0300$ clientes.
- $W_q = \frac{0,0300}{0,1} = 0,300$ minutos.
- *Conclusão:* Como $0,300 \leq 1$, a condição da direção do call center é satisfeita.

Devem estar ao serviço, no mínimo, 3 servidores ($c = 3$).

Alínea b) :

Calcular o comprimento médio da fila de espera (L_q) com o número de servidores apurado. Com base nos cálculos no teste de $c = 3$ da alínea anterior, o valor de L_q já foi determinado.

$$L_q = \frac{30,618}{1020,18} = \frac{729}{24290} \approx 0,0300 \text{ clientes}$$

Assumindo 3 servidores, o comprimento médio da fila de espera é de aproximadamente 0,03 clientes (o que indica que, na grande maioria do tempo, a fila encontra-se vazia).

Alínea c) :

Calcular a probabilidade de um cliente aguardar, pelo menos, 3 minutos na fila ($P(W_q \geq 3)$).

A distribuição do tempo de espera na fila para um sistema M/M/c é uma distribuição mista. A probabilidade de esperar um tempo $t > 0$ é dada pela probabilidade de o cliente ter de esperar (encontrar todos os servidores ocupados, Fórmula C de Erlang - P_c) multiplicada pela probabilidade condicional de o tempo exceder t :

$$P(W_q \geq t) = P_c \cdot e^{-c\mu(1-\rho)t}$$

1º - Calcular P_c (Probabilidade de um cliente ter de esperar)

Calculou-se P_c subtraindo a 1 a probabilidade de o sistema ter menos de c clientes:

$$P_c = 1 - P_0 \sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!}$$

$$P_c = 1 - \frac{140}{347} \left(\frac{0,9^0}{0!} + \frac{0,9^1}{1!} + \frac{0,9^2}{2!} \right) = 1 - \frac{140}{347} (1 + 0,9 + 0,405)$$

$$P_c = 1 - \frac{140}{347} (2,305) = 1 - \frac{322,7}{347} = \frac{347 - 322,7}{347} = \frac{24,3}{347} = \frac{243}{3470} \approx 0,0700$$

(Isto significa que apenas cerca de 7% dos clientes encontram a linha ocupada e têm de ir para a fila de espera).

2º - Calcular o expoente da distribuição exponencial para $t = 3$

Substituindo os parâmetros do sistema ($c = 3$, $\mu = 1/9$, $\rho = 0,3$ e $t = 3$):

$$-c\mu(1-\rho)t = -3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right) \cdot (1-0,3) \cdot 3 = -\frac{1}{3} \cdot 0,7 \cdot 3 = -0,7$$

3º - Calcular a probabilidade final

$$P(W_q \geq 3) = \frac{243}{3470} \cdot e^{-0,7} \approx 0,0700 \cdot 0,4966 \approx 0,0348$$

A probabilidade de um cliente ter de aguardar, pelo menos, 3 minutos na fila é de aproximadamente 0,0348 (ou 3,48%).

Resolução Exercício 2

Segundo a metodologia PERT, a duração esperada (t_e) e a variância (σ^2) de cada atividade calculam-se pelas fórmulas:

$$t_e = \frac{D_{opt} + 4 \cdot D_{mp} + D_{pess}}{6} \quad \sigma^2 = \left(\frac{D_{pess} - D_{opt}}{6} \right)^2$$

Aplicaram-se estas fórmulas a todas as atividades:

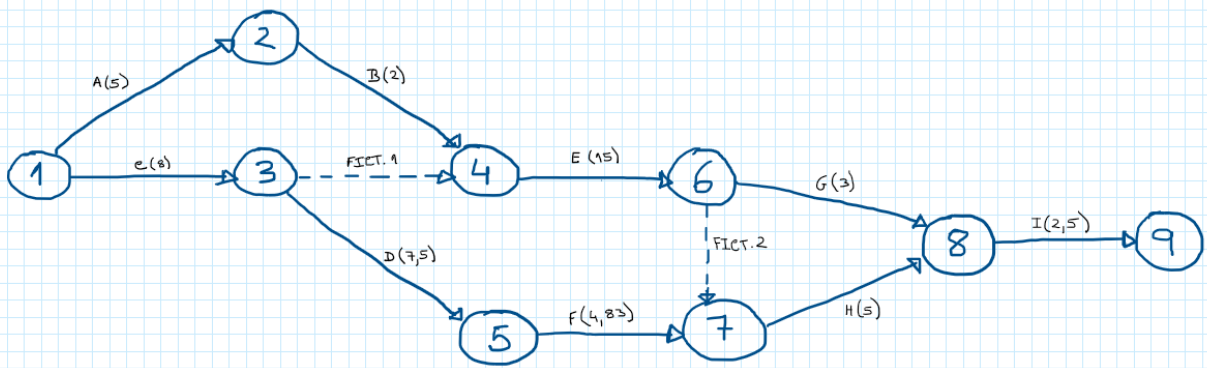
Tarefa	D_{opt}	D_{mp}	D_{pess}	t_e (semanas)	σ^2
A	3	5	7	$(3 + 20 + 7)/6 = 5$	$((7 - 3)/6)^2 = 4/9$
B	2	2	2	$(2 + 8 + 2)/6 = 2$	0
C	5	8	11	$(5 + 32 + 11)/6 = 8$	$((11 - 5)/6)^2 = 1$
D	6	7	11	$(6 + 28 + 11)/6 = 7,5$	$((11 - 6)/6)^2 = 25/36$
E	13	15	17	$(13 + 60 + 17)/6 = 15$	$((17 - 13)/6)^2 = 4/9$
F	3	5	6	$(3 + 20 + 6)/6 = 29/6 \approx 4,83$	$((6 - 3)/6)^2 = 1/4$
G	3	3	3	$(3 + 12 + 3)/6 = 3$	0
H	4	5	6	$(4 + 20 + 6)/6 = 5$	$((6 - 4)/6)^2 = 1/9$
I	1	2	6	$(1 + 8 + 6)/6 = 2,5$	$((6 - 1)/6)^2 = 25/36$

Alínea a) :

Análise das precedências:

- A e C não têm precedências (partem do nó inicial).
- B depende de A.
- D depende de C.
- E depende de B e C → requer atividade fictícia para unir os termos de B e C.
- F depende de D.
- G depende de E.
- H depende de E e F → requer atividade fictícia para unir os termos de E e F.
- I depende de G e H.

Identificou-se a necessidade de 2 atividades fictícias (representadas a tracejado) para respeitar todas as dependências sem criar relações falsas. Construiu-se a rede no formato AOA (*Activity on Arrow*) da seguinte forma:



LEGENDA

— Atividade real (duração em semanas)

- - - - - Atividade fictícia (duração 0)

Representação completa da rede (nós 1 a 9):

Arco	Atividade	Duração
1→2	A	5
1→3	C	8
2→4	B	2
3→4	Fictícia 1	0
3→5	D	7,5
4→6	E	15
5→7	F	$29/6 \approx 4,83$
6→7	Fictícia 2	0
6→8	G	3
7→8	H	5
8→9	I	2,5

Justificação das atividades fictícias:

- **Fictícia 1 (3→4):**
E depende de B e C. Como B termina no nó 4 e C termina no nó 3, esta fictícia garante que E (que parte de 4) só começa quando ambas terminam.
- **Fictícia 2 (6→7):**
H depende de E e F. Como F termina em 7 e E termina em 6, a fictícia leva a dependência de E até ao nó 7. (G, que só depende de E, parte diretamente de 6, ficando assim corretamente independente de F).

Nota : As atividades G (6→8) e H (7→8) têm nós de origem distintos (6 e 7), pelo que podem convergir naturalmente para o mesmo nó de destino (8) sem violar regras AOA. I depende de G e H, partindo diretamente do nó 8. Não se justifica qualquer atividade fictícia adicional, cumprindo-se o requisito do enunciado de utilizar o menor número de atividades fictícias.

Alínea b) :

Cálculo em Sentido Direto (Tempos Mais Cedro - E_i):

Regra: $E_j = \max_i (E_i + d_{ij})$

- $E_1 = 0$
- $E_2 = E_1 + 5 = 5$
- $E_3 = E_1 + 8 = 8$
- $E_4 = \max (E_2 + 2; E_3 + 0) = \max (7; 8) = 8$
- $E_5 = E_3 + 7,5 = 15,5$
- $E_6 = E_4 + 15 = 23$
- $E_7 = \max (E_5 + 29/6; E_6 + 0) = \max (20,33; 23) = 23$
- $E_8 = \max (E_6 + 3; E_7 + 5) = \max (26; 28) = 28$
- $E_9 = E_8 + 2,5 = 30,5$

Cálculo em Sentido Inverso (Tempos Mais Tarde - L_i):

Regra: $L_i = \min_j (L_j - d_{ij})$, começando com $L_9 = E_9 = 30,5$

- $L_9 = 30,5$
- $L_8 = L_9 - 2,5 = 28$
- $L_7 = L_8 - 5 = 23$
- $L_6 = \min (L_8 - 3; L_7 - 0) = \min (25; 23) = 23$
- $L_5 = L_7 - 29/6 = 23 - 4,83 = 18,17$
- $L_4 = L_6 - 15 = 23 - 15 = 8$
- $L_3 = \min (L_5 - 7,5; L_4 - 0) = \min (10,67; 8) = 8$
- $L_2 = L_4 - 2 = 8 - 2 = 6$
- $L_1 = \min (L_2 - 5; L_3 - 8) = \min (1; 0) = 0$

Quadro resumo dos tempos nos nós:

Nó i	E_i	L_i	Folga ($L_i - E_i$)
1	0	0	0
2	5	6	1
3	8	8	0
4	8	8	0
5	15,5	18,17	2,67
6	23	23	0
7	23	23	0
8	28	28	0
9	30,5	30,5	0

Alínea c) :

Os nós com folga nula constituem o caminho crítico: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$

As atividades reais que o integram são: $C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I$

Duração do projeto: $8 + 15 + 5 + 2,5 = 30,5$ semanas

Identificou-se o caminho crítico através da sequência de atividades com folga total nula, ou seja, atividades cujo atraso implica diretamente um atraso equivalente na data de conclusão do projeto. Este resultado obteve-se de duas formas complementares:

1. **Análise das folgas dos nós:**

Os nós 1, 3, 4, 6, 7, 8 e 9 apresentam $L_i = E_i$ (folga zero), definindo um caminho contínuo do início ao fim.

2. **Verificação por enumeração de todos os caminhos possíveis:**

- $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow I = 5 + 2 + 15 + 3 + 2,5 = 27,5$ semanas
- $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I = 5 + 2 + 15 + 5 + 2,5 = 29,5$ semanas
- $C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow I = 8 + 15 + 3 + 2,5 = 28,5$ semanas
- $C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I = 8 + 15 + 5 + 2,5 = 30,5$ semanas ← máximo
- $C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow I = 8 + 7,5 + 4,83 + 5 + 2,5 \approx 27,83$ semanas

O caminho crítico C-E-H-I determina a duração mínima do projeto (30,5 semanas). Qualquer atraso numa destas quatro atividades traduz-se num atraso igual no prazo final. As restantes atividades (A, B, D, F, G) têm margem de atraso (folga) sem comprometer o prazo global.

Alínea d) :

Cálculo da folga total da atividade B:

A atividade B vai do nó 2 ao nó 4, com duração de 2 semanas.

- *Early Start* (ES) = $E_2 = 5$
- *Early Finish* (EF) = $E_2 + 2 = 7$
- *Late Finish* (LF) = $L_4 = 8$
- *Late Start* (LS) = $L_4 - 2 = 6$

Folga Total de B = $LS - ES = LF - EF = 6 - 5 = 8 - 7 = 1$ semana

O membro da equipa afirma que: "Se a atividade B atrasar 2 semanas, o prazo final mantém-se porque esta atividade não é crítica."

É verdade que a atividade B não é crítica (a sua folga é de 1 semana, superior a zero), contudo, é falso que um atraso de 2 semanas não afete o prazo final.

A folga disponível é de apenas 1 semana. Um atraso de 2 semanas excede a folga em 1 semana, provocando um atraso de 1 semana na data de conclusão do projeto (de 30,5 para 31,5 semanas).

Conclusão: A afirmação é FALSA. Embora B não seja crítica, um atraso de 2 semanas supera a sua margem de folga (1 semana), comprometendo o prazo final do projeto.

Alínea e) :

Parâmetros do caminho crítico (C-E-H-I):

Duração esperada do projeto: $\mu = 30,5$ semanas

Variância do caminho crítico (soma das variâncias das atividades críticas):

$$\sigma_{CC}^2 = \sigma_C^2 + \sigma_E^2 + \sigma_H^2 + \sigma_I^2 = 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{25}{36}$$

$$\sigma_{CC}^2 = \frac{36}{36} + \frac{16}{36} + \frac{4}{36} + \frac{25}{36} = \frac{81}{36} = \frac{9}{4} = 2,25$$

Desvio padrão do caminho crítico: $\sigma_{CC} = \sqrt{2,25} = 1,5$ semanas

Assumiu-se, pelo Teorema Central do Limite, que a duração total do projeto segue aproximadamente uma Distribuição Normal: $T \sim N(30,5; 1,5^2)$

Para cada b3nus, calculou-se a vari3vel reduzida $Z = \frac{T_{alvo} - \mu}{\sigma}$ e consultou-se a tabela da Normal Padr3o $\Phi(z)$.

B3nus 1 - Sal3rio extra (redu33o de 10%):

$$T_1 = 30,5 \times (1 - 0,10) = 30,5 \times 0,90 = 27,45 \text{ semanas}$$

$$Z_1 = \frac{27,45 - 30,5}{1,5} = \frac{-3,05}{1,5} \approx -2,03$$

$$P(T \leq 27,45) = \Phi(-2,03) = 1 - \Phi(2,03) \approx 1 - 0,9788 = 0,0212 \text{ (2,12\%)}$$

B3nus 2 - Meio sal3rio extra (redu33o de 5%):

$$T_2 = 30,5 \times (1 - 0,05) = 30,5 \times 0,95 = 28,975 \text{ semanas}$$

$$Z_2 = \frac{28,975 - 30,5}{1,5} = \frac{-1,525}{1,5} \approx -1,02$$

$$P(T \leq 28,975) = \Phi(-1,02) = 1 - \Phi(1,02) \approx 1 - 0,8461 = 0,1539 \text{ (15,39\%)}$$

B3nus 3 - 3 dias 3teis de f3rias (terminar no tempo previsto):

$$T_3 = 30,5 \text{ semanas (dura33o esperada)}$$

$$Z_3 = \frac{30,5 - 30,5}{1,5} = 0$$

$$P(T \leq 30,5) = \Phi(0) = 0,5000 \text{ (50,00\%)}$$

Quadro resumo das probabilidades de b3nus:

B3nus	Condi33o	T_{alvo}	Z	Probabilidade
Sal3rio extra	Redu33o de 10%	27,45 sem.	-2,03	$\approx 2,12\%$
Meio sal3rio extra	Redu33o de 5%	28,975 sem.	-1,02	$\approx 15,39\%$
+3 dias de f3rias	Tempo previsto	30,5 sem.	0	50,00%

A probabilidade de obten33o do b3nus m3ximo 3 muito reduzida (apenas $\sim 2\%$), dado que exige uma redu33o muito significativa face 3 dura33o esperada. J3 o b3nus de f3rias tem uma probabilidade de 50%, pois coincide com o valor esperado da distribu33o Normal.