U.C. 21157

Cálculo para Informática

29 de Janeiro de 2014

-- INSTRUÇÕES --

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância. O tempo de duração da prova de p-fólio é de 90 minutos.
- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Sempre que não utilize o enunciado da prova para resposta, poderá ficar na posse do mesmo.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por 2 páginas e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.
- Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este exame tem a cotação total de 20 valores, distribuídos do seguinte modo: Grupo I: 4 valores, Grupo II: 9 valores, Grupo III: 7 valores.
- Não é permitida a utilização de quaisquer tabelas ou formulários.
- Não é permitida a utilização de máquina de calcular.

Grupo I (4 valores)

Prove que a sucessão x_n tal que $x_1 = \frac{1}{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}}$ é convergente e calcule o seu limite.

Sugestão: Prove que $\forall n \in N$ se tem $x_n \leq 1$

Vamos provar a sugestão por indução

$x_1 = \frac{1}{2} \leq 1$ e se $x_n \leq 1$ então $x_{n+1} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$ logo a sucessão dada é limitada superiormente, vamos provar que é crescente, de novo por indução $x_2 = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \geq \frac{1}{2} = x_1$ e se $x_{n+1} \geq x_n$ então $x_{n+2} = \sqrt{\frac{1+x_{n+1}}{2}} \geq \sqrt{\frac{1+x_n}{2}} = x_{n+1}$ logo a sucessão é crescente e limitada superiormente logo convergente, por outro lado se $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ deverá ter-se $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ uma vez que $x_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} x$ e $\sqrt{\frac{1+x_n}{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ pois $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ é uma função contínua.

Resolvendo a equação $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ tem-se $x^2 = \frac{1+x}{2}$ ou seja $2x^2 - x - 1 = 0$ que tem como soluções $x = 1, \frac{-1}{2}$ e como o limite da sucessão não pode ser negativo (a sucessão é crescente e de termos positivos) tem-se que o limite da sucessão é 1

Grupo II (9 valores)

1. Prove que a função $f(x) = x^9 + 2x - 1$ tem uma única raiz em *R*.

$f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 2 > 0$ logo como pelo teorema de Bolzano se $h:[a,b] \to R$ é contínua com $h(a)$ e $h(b)$ de sinais contrários h tem pelo menos um zero em $]a,b[$ deduz-se a existência de um zero da função *f* que é único pois pelo teorema de Rolle , se existisse mais do que um zero então a derivada da função deveria anular-se pelo menos num ponto, mas $f'(x) = 9x^8 + 2$ nunca se anula e por conseguinte a função tem um único zero.

2. Calcule o $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - 1)sen(x)}{\cos(x) - \cos^2(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)sen(x)}{\cos(x)-\cos^2(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x\cos(x)}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}$$ e como $\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x\cos(x)}=1$ e

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ devemos calcular $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}$ aplicando a regra de Cauchy tem-se

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{sen(x)}=2$ logo o limite pretendido é 2

3. Prove que se $x>0$ então $\log(1+x)-\log(x)<\frac{1}{x}$

Aplicando o teorema de Lagrange tem-se que $\log(1+x)-\log(x)=\frac{1}{c}$ em que $x<c<x+1$

logo $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x}$ donde o resultado.

Grupo III (7 valores)

1. Calcule $\int\frac{1}{x\log^3(x)}dx \quad (x>1)$

É uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $\varphi(x)=\log(x)$ e $f(z)=\frac{1}{z^3}$ logo como

$\int\frac{1}{z^3}dz=\frac{-1}{2z^2}+k$ tem-se $\int\frac{1}{x\log^3(x)}dx=\frac{-1}{2\log^2(x)}+k$.

2. Calcule $\int\frac{\cos(x)}{sen^2(x)+2}dx$

É uma primitiva do tipo $\int f(\varphi(x))\dot{\varphi}(x)dx$ com $\varphi(x)=sen(x)$ e $f(z)=\frac{1}{z^2+2}$ logo como

$\int\frac{1}{z^2+2}dz=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dz=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+k$ tem-se

$$\int\frac{\cos(x)}{sen^2(x)+2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{sen(x)}{\sqrt{2}}\right)+k$$

FIM