E-fólio B | Folha de resolução para E-fólio

UNIDADE CURRICULAR: ELEMENTOS DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA

CÓDIGO: 21037

DOCENTE: Catarina Nunes
TUTOR: Ana Leitão Ferreira

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

1.1 - 0.5 valores

Seja $p_X(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. X.

$$\forall x \ : \ p_X(x) = P(X = x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y)$$

e $p_Y(x)$: função de probabilidade marginal da v.a. Y.

$$\forall y \ : \ p_Y(y) = P(Y = y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

(50% cotação)
A tabela seguinte apresenta as funções de probabilidades marginais:

$p_{X,Y}(x,y)$	$Y = 1000$	$Y = 2000$	$Y = 3000$	$Y = 4000$	$p_X(x)$
$X = 1000$	0.20	0.04	0.01	0	0.25
$X = 2000$	0.10	0.36	0.09	0	0.55
$X = 3000$	0	0.05	0.10	0	0.15
$X = 4000$	0	0	0	0.05	0.05
$p_Y(y)$	0.3	0.45	0.2	0.05	

(50% cotação)

1.2 - 0.5 valores

Seja $p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000)$ a probabilidade do primeiro titular ter um rendimento mensal de 2000 euros, admitindo que o segundo titular tem um rendimento idêntico.

(25% cotação)

$$p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000) = \frac{p_{X,Y}(X = 2000, Y = 2000)}{p_Y(Y = 2000)} =$$

(50% cotação)

$$= \frac{0.36}{0.45} = 0.89$$

(25% cotação)

1.3 - 0.5 valores

$$E(X) = \sum_x p_X(x) = 1000 \times 0.25 + 2000 \times 0.55 + 3000 \times 0.15 + 4000 \times 0.05 = 2000$$

(20% cotação)

$$E(Y) = \sum_y p_Y(y) = 1000 \times 0.30 + 2000 \times 0.45 + 3000 \times 0.20 + 4000 \times 0.05 = 2000$$

(20% cotação)

$$Var(X) = \sum_x (X - E(X))^2 p_X(x) = (1000-2000)^2 \times 0.25 + (2000-2000)^2 \times 0.55 +$$

$$+(3000 - 2000)^2 \times 0.15 + (4000 - 2000)^2 \times 0.05 = 600000$$

(20% cotação)

$$\sigma_X = \sqrt{600000} = 774.6$$

(10% cotação)

$$Var(Y) = \sum_y (Y - E(Y))^2 p_Y(y) = (1000-2000)^2 \times 0.30 + (2000-2000)^2 \times 0.45 +$$

$$+(3000 - 2000)^2 \times 0.20 + (4000 - 2000)^2 \times 0.05 = 700000$$

(20% cotação)

$$\sigma_Y = \sqrt{700000} = 836.7$$

(10% cotação)

1.4 - 0.5 valores

As variáveis X e Y são independentes se se verificarem as seguintes condições, para todos os valores de x e y:

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = p_X(x)$$

$$p_{X|Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = p_Y(y)$$

donde,

$$\forall x, y : p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$

(50% cotação)

Mas como pela alínea anterior 1.2 $p_{X|Y}(X = 2000|Y = 2000) = 0.8$ e $p_X(X = 2000) = 0.55$, conclui-se que as variáveis não são independentes.

(50% cotação)

1.5 - 0.5 valores

$$Cov(X,Y) = E\left[(x - E(X))\,(y - E(Y))\right] = \sum_x \sum_y (x - E(X))\,(y - E(Y))\,p_{X,Y}(x,y)$$

também se poderia utilizar

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

(30% cotação)

substituindo

$$Cov(X,Y) = (1000-2000)(1000-2000)0.20+(1000-2000)(2000-2000)0.04+\cdots+$$

$$+(3000-2000)(3000-2000)0.10+(4000-2000)(4000-2000)0.05 = 490000$$

(20% cotação)

O coeficiente de correlação linear entre X e Y

$$\rho_{XY} = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} =$$

(30% cotação)

$$= \frac{490000}{774.6 \times 836.7} = 0.756$$

(20% cotação)

1.6 - 0.75 valores

$$E(R) = E\left(X+Y\right) == E(X) + E(Y) =$$

(20% cotação)

$$= 2000 + 2000 = 4000$$

(10% cotação)

$$Var(R) = Var\left(X+Y\right) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) =$$

(35% cotação)

$$= 600000 + 700000 + 2 \times 490000 = 2280000$$

(15% cotação)

$$\sigma_R = \sqrt{2280000} = 1509.97$$

(20% cotação)

2. - 0.75 valores

Seja Y - v.a. número de bolinhos de feijão de tamanho não conforme (abaixo do permitido) entre os 5 retirados da fornada.
Então, Y segue uma distribuição Hipergeométrica $H(Mp, M(1-p), N)$ em que p representa a proporção de bolinhos não conformes na formada ($p = 0.01$) e M o número de bolinhos que compõe a fornada ($M = 300$).

$$Y \sim H(3, 297, 5)$$

(40% cotação)
A função de probabilidade de Y é:

$$p(y) = P(Y=y) = \frac{\left(\begin{array}{c}3\\y\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}297\\5-y\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}300\\5\end{array}\right)}$$

(10% cotação)
Pretende-se

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - p(0)$$

(20% cotação)
e

$$p(0) = P(Y=0) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 297 \\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 300 \\ 5 \end{pmatrix}} = \frac{297!\ 5!\ 295!}{5!\ 300!\ 292!} = 0.951$$

(20% cotação)

$$P(Y \geq 1) = 1 - 0.951 = 0.049$$

(10% cotação)

FIM