E-fólio A | Folha de resolução para E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: Luís Carlos Crispim Pereria

N^0 de Estudante: 2300163

Curso: LEI **Turma:** 03

Data: 27 de Março de 2025 **Ano Letivo:** 2024/25

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e José Agapito

1.a)

Restrições:

r1: $X + Y = 1$

r2: $X - Y = 2$

r3: $Y = 3$

r4: $X = 0$

r5: $Y = 0$

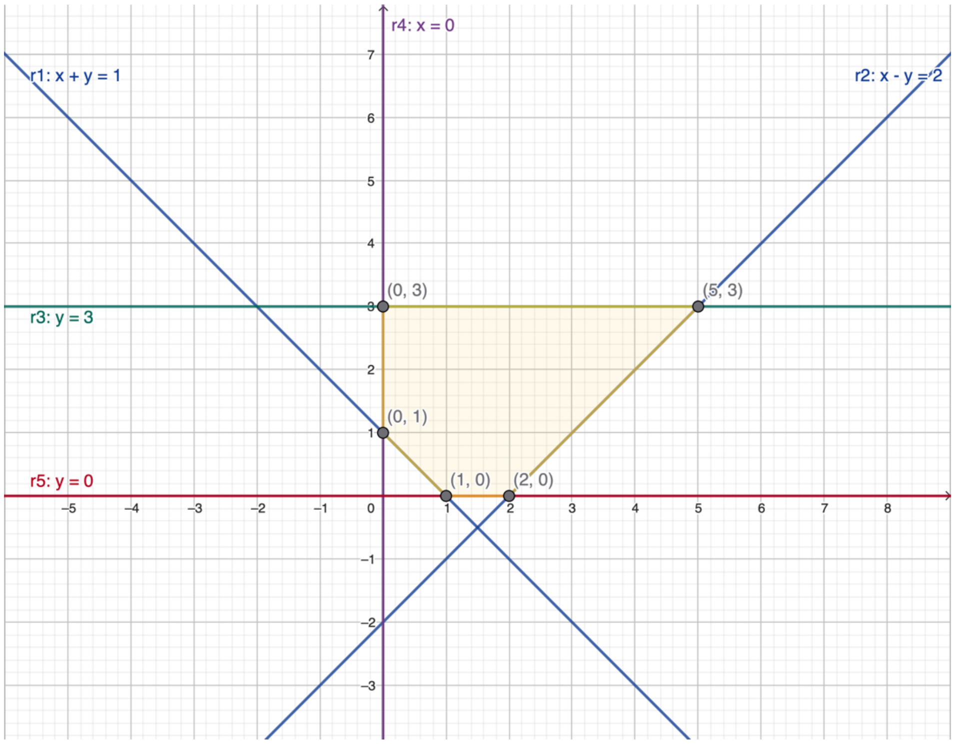

Figura 1 – Representação do polígono admissível

Representação gráfica da região viável obtida pelas interseções das restrições. A área sombreada corresponde ao conjunto de soluções admissíveis do problema.

1.b)

Restrições:

r1: $X + Y = 1$

r2: $X - Y = 2$

r3: $Y = 3$

r4: $X = 0$

r5: $Y = 0$

Vértices do polígono admissível:

a: (0,1)

b: (1,0)

c: (2,0)

d: (5,3)

e: (0,3)

minimizar $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}$

a: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(0) + 2(1) \Longrightarrow \mathrm{F} = 2$

b: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(1) + 2(0) \Longrightarrow \mathrm{F} = -2$

c: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(2) + 2(0) \Longrightarrow \mathrm{F} = -4$

d: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(5) + 2(3) \Longrightarrow \mathrm{F} = -4$

e: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(0) + 2(3) \Longrightarrow \mathrm{F} = 6$

Solução ótima $F = -4$ que ocorre nos pontos (2,0) e (5,3).
Quando a função objetivo assume o mesmo valor em dois vértices, significa que existe um número infinito de soluções ótimas ao longo do segmento de reta entre (2,0) e (5,3).

Interpretando a solução ótima (para o ponto (2,0))
Variáveis de decisão: $X = 2, Y = 0$
Valor ótimo da função objetivo: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(2) + 2(0) \Longrightarrow \mathrm{F} = -4$

Cálculo das variáveis de folga/excesso (para o ponto (2,0))
r1: $X + Y \geq 1$ | $2 + 0 = 2$ – Excesso 1
r2: $X - Y \leq 2$ | $2 - 0 = 2$ – Folga 0
r3: $Y \leq 3$ | $0 \leq 3$ – Folga 3

Interpretando a solução ótima (para o ponto (5,3))
Variáveis de decisão: $X = 5, Y = 3$
Valor ótimo da função objetivo: $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} \Longrightarrow \mathrm{F} = -2(5) + 2(3) \Longrightarrow \mathrm{F} = -4$

Cálculo das variáveis de folga/excesso (para o ponto (5,3))
r1: $X + Y \geq 1$ | $5 + 3 = 8$ – Excesso 7
r2: $X - Y \leq 2$ | $5 - 3 = 2$ – Folga 0
r3: $Y \leq 3$ | $3 = 3$ – Folga 0

Trata-se de um problema com soluções múltiplas. Todos os pontos pertencentes ao segmento de reta definido pelos pontos (2, 0) e (5, 3) minimizam a função objetivo sujeita às restrições dadas.
A variável de folga associada à restrição *r2* é sempre nula ao longo do segmento de soluções ótimas, o que significa que esta restrição é sempre satisfeita com igualdade, ou seja, o recurso correspondente esgota-se. A variável de folga da restrição *r3* ora é nula, ora não é, pelo que o recurso esgota-se apenas em alguns pontos (por exemplo, em (5, 3)). Já a variável de excesso associada à restrição *r1* nunca é nula, o que significa que esta restrição é sempre satisfeita com desigualdade, ou seja, o recurso correspondente nunca se esgota.

1.c)

Forma geral:
minimizar $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}$

sujeito a $\begin{cases} X + Y \geq 1 \\ X - Y \leq 2 \\ Y \leq 3 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$

Forma standard:

minimizar $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} + M\alpha$

sujeito a $\begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 1 \\ X - Y + F_2 = 2 \\ Y + F_3 = 3 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$

minimizar $\mathrm{F} =$ maximizar $-\mathrm{F}$
maximizar $-\mathrm{F} = 2\mathrm{X} - 2\mathrm{Y} - M\alpha$

sujeito a $\begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 1 \\ X - Y + F_2 = 2 \\ Y + F_3 = 3 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$

1.d)

maximizar $-\mathrm{F} = 2\mathrm{X} - 2\mathrm{Y} - M\alpha$

sujeito a $\begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 1 \\ X - Y + F_2 = 2 \\ Y + F_3 = 3 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
α	1	1	-1	0	0	1	1	
F_2	1	-1	0	1	0	0	2	
F_3	0	1	0	0	1	0	3	
$-F$	-2	2	0	0	0	M	0	$l_4 - Ml_1$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
α	1	1	-1	0	0	1	1	Ok
F_2	1	-1	0	1	0	0	2	$l_2 - 1l_1$
F_3	0	1	0	0	1	0	3	$l_3 - 1l_1$
$-F$	$-2 - M$	$2 - M$	$-M$	0	0	$2M$	M	$l_4 - (-2 - M)l_1$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
X	1	1	-1	0	0	1	1	$l_1 - (-1)l_2$
F_2	0	-2	1	1	0	-1	1	Ok
F_3	0	1	0	0	1	0	3	$l_3 - (0)l_2$
$-F$	0	4	-2	0	0	$2 + M$	2	$l_4 - (-2)l_2$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
X	1	-1	0	1	0	0	2	$l_1 - (-1)l_3$
F_1	0	-2	1	1	0	-1	1	$l_2 - (-2)l_3$
F_3	0	1	0	0	1	0	3	Ok
$-F$	0	0	0	0	2	M	4	$l_4 - (0)l_3$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
X	1	0	0	1	1	0	5	
F_1	0	0	1	1	2	-1	7	
Y	0	1	0	0	1	0	3	
$-F$	0	0	0	0	2	M	4	

Minimizar $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} + M\alpha$

sujeito a $\begin{cases} X + Y - F_1 + \alpha = 1 \\ X - Y + F_2 = 2 \\ Y + F_3 = 3 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha \geq 0 \end{cases}$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
α	1	1	-1	0	0	1	1	
F_2	1	-1	0	1	0	0	2	
F_3	0	1	0	0	1	0	3	
F	2	-2	0	0	0	$-M$	0	$l_4 - Ml_1$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
α	1	1	-1	0	0	1	1	Ok
F_2	1	-1	0	1	0	0	2	$l_2 - (-1)l_1$
F_3	0	1	0	0	1	0	3	$l_3 - 1l_1$
F	$2 - M$	$-2 - M$	M	0	0	$-2M$	$-M$	$l_4 - (-2 - M)l_1$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
Y	1	1	-1	0	0	1	1	$l_1 - (-1)l_3$
F_2	2	0	-1	1	0	1	3	$l_2 - (-1)l_3$
F_3	-1	0	1	0	1	-1	2	Ok
F	4	0	-2	0	0	$2 - M$	2	$l_4 - (-2)l_3$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
Y	0	1	0	0	1	0	3	$l_1 - (0)l_2$
F_2	1	0	0	1	1	0	5	Ok
F_1	-1	0	1	0	1	-1	2	$l_3 - (-1)l_2$
F	2	0	0	0	2	$-M$	6	$l_4 - (2)l_2$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	TI	Δ
Y	0	1	0	0	1	0	3	
X	1	0	0	1	1	0	5	
F_1	0	0	1	1	2	-1	7	
F	0	0	0	-2	0	$-M$	-4	

O algoritmo para, uma vez que já não existem valores negativos na linha da função objetivo.
Como vimos no desenvolvimento do exercício pelo método de penalidades, quer na versão em que se trabalhou com a função objetivo em forma de minimização $F = -2X + 2Y + M\alpha$, quer na forma equivalente de maximização $-F = 2X - 2Y - M\alpha$, obteve-se exatamente a mesma solução ótima, visto α ter sido eliminado da base implica que o seu valor é nulo, assim, a solução obtida é viável no problema original, sem recurso a variáveis artificiais.

Logo, concluímos que este problema tem solução dada por:
$(X^*, Y^*) = (5, 3)\ com\ F^* = -4$

Comprovado pelo valor da função objetivo onde:
Na forma de minimização:
$\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y} + M\alpha = -2(5) + 2(3) + 0 = -10 + 6 = -4$
Na forma de maximização:
$-\mathrm{F} = 2\mathrm{X} - 2\mathrm{Y} - M\alpha = 2 * 5 - 2(3) - 0 = 10 - 6 = 4$

Variáveis de folga e artificial:
$F_1 = 7$, a restrição $X + Y \geq 1$ é satisfeita com excesso
$F_2 = 0$, a restrição $X - Y \leq 2$ é satisfeita com igualdade (recurso esgota-se)
$F_3 = 0$, a restrição $Y \leq 3$ é satisfeita com igualdade (recurso esgota-se)
$\alpha = 0$, a variável artificial foi eliminada da base, a solução é viável.

1.e)

A solução não é única.
Observando a última tabela do método das penalidades, verifica-se que a variável F_2, embora fora da base, apresenta coeficiente nulo na linha da função objetivo. Isto significa que é possível introduzir essa variável na base sem alterar o valor da função objetivo, ou seja, existe pelo menos outro ponto ótimo.
Além disso, como se comprovou graficamente, a função objetivo assume o mesmo valor nos pontos (2,0) e (5,3), pelo que todos os pontos do segmento de reta entre esses dois vértices minimizam a função objetivo.
Assim, conclui-se que se trata de um problema **com soluções múltiplas**.

1.f)

Gestão de Energia entre Estudo e Lazer:
Um estudante universitário pretende planear a sua rotina diária de forma equilibrada, procurando distribuir o tempo disponível entre o estudo e o descanso. Esta gestão é particularmente importante porque o esforço mental e físico acumulado ao longo da semana pode afetar negativamente a sua concentração e produtividade.
O seu objetivo principal é encontrar o nível de atividade ótimo que lhe permita minimizar a **fadiga líquida diária**, garantindo simultaneamente um mínimo de tempo dedicado às suas responsabilidades académicas.
Nas últimas semanas, o estudante tem procurado manter um equilíbrio entre duas atividades estudo ativo e descanso/lazer com função recuperadora.
Sabe, por experiência, que cada hora de estudo consome cerca de 2 unidades de energia mental, enquanto cada hora de descanso ou lazer contribui para recuperar 2 unidades dessa mesma energia. A gestão correta destas atividades é, por isso, essencial para o seu bem-estar e sucesso académico.
O estudante estabeleceu algumas regras para si próprio, de forma a manter disciplina e equilíbrio.
No total, quer garantir que realiza pelo menos uma hora de atividades por dia, entre estudo e lazer.
O tempo dedicado ao estudo não deve ultrapassar em mais de 2 horas o tempo de descanso, para evitar estados de exaustão.
Além disso, decidiu que não deve ultrapassar 3 horas diárias de lazer, para não comprometer o tempo útil de estudo.

Variáveis de decisão:
X: número de horas de estudo por dia
Y: número de horas de lazer ou descanso ativo por dia

Função objetivo (minimizar a fadiga líquida):
minimizar $\mathrm{F} = -2\mathrm{X} + 2\mathrm{Y}$

Restrições:

$X + Y \geq 1$	(tempo mínimo total de atividades)
$X - Y \leq 2$	(equilíbrio entre estudo e descanso)
$Y \leq 3$	(limite de horas de lazer por dia)
$X, Y \geq 0$	(não negatividade)

1.g)

A análise do problema mostra que existem múltiplas soluções ótimas, todas elas correspondentes a um mesmo valor mínimo da função objetivo $F = -2X + 2Y = -4$
Esse valor é atingido em dois pontos extremos da região viável $(X, Y) = (2,0)$, representando 2 horas de estudo e 0 horas de lazer $(X, Y) = (5,3)$, com 5 horas de estudo e 3 horas de lazer.
Como a função objetivo assume o mesmo valor nestes dois vértices, todas as combinações de valores entre esses dois pontos, ou seja, todos os pontos do segmento de reta entre (2,0) e (5,3), constituem também soluções ótimas. Estas soluções representam diferentes formas de equilibrar o tempo diário do estudante, mantendo constante a fadiga líquida total.

Por exemplo:
(3,1), o estudante estuda 3 horas e lazer/descanso 1 hora
(4,2), o estudante estuda 4 horas e lazer/descanso 2 horas
Todas estas distribuições diferentes de estudo e lazer/descanso resultam na mesma carga líquida de esforço diário, o que permite ao estudante escolher o ponto mais adequado ao seu ritmo, mantendo o equilíbrio entre produtividade e bem-estar. Apesar de a quantidade de estudo aumentar nestes exemplos, o aumento correspondente no tempo de lazer compensa o esforço adicional, mantendo o equilíbrio energético diário.

As variáveis de folga confirmam que:
A restrição do total de atividades $X + Y \geq 1$ nunca se esgota ou seja há sempre tempo "a mais"
A restrição $X - Y \leq 2$ esgota-se em todas as soluções ótimas (a folga é 0)
A restrição $Y \leq 3$ pode ou não esgotar-se, dependendo do ponto escolhido

O problema admite uma infinidade de soluções ótimas, todas elas representando diferentes distribuições de tempo entre estudo e lazer, com o mesmo valor mínimo da fadiga líquida. Esta flexibilidade permite que o estudante escolha o plano mais adequado às suas preferências ou ao seu estado de energia em cada dia, sem comprometer o equilíbrio global do esforço.