Geometria 21165

Actividade formativa I

Problema 1. *Demonstre as seguintes consequências dos axiomas de incidência $A_1 - A_3$:*

a) Para cada linha l existe pelo menos um ponto P que não incide com l.

b) Para cada ponto P existe pelo menos uma linha que não passa por P.

Problema 2. *Sejam $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ planos de incidência (isto é, modelos dos axiomas de incidência $A_1 - A_3$). Seja $\varphi : \mathcal{E}_1 \mapsto \mathcal{E}_1$ uma colineação, ou seja, uma bijecção que verifica a seguinte propriedade:*

A, B, C são pontos colineares de $\mathcal{E}_1$ sse ("se e só se") $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C)$ são pontos colineares de $\mathcal{E}_2$

Mostre que:

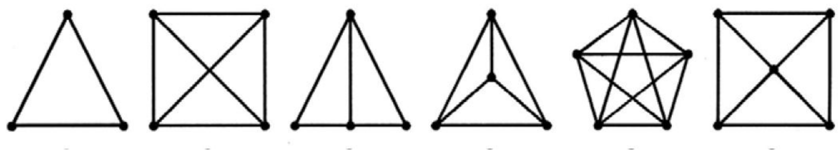
a) Se l é uma linha de $\mathcal{E}_1$, então $\varphi(l)$ é uma linha de $\mathcal{E}_2$.

b) Se l_1 e l_2 são linhas concorrentes de $\mathcal{E}_1$, $\varphi(l_1)$ e $\varphi(l_2)$ são linhas concorrentes de $\mathcal{E}_2$.

c) Há tantas linhas de $\mathcal{E}_1$ passando por $P \in \mathcal{E}_1$ como há linhas de $\mathcal{E}_2$ passando por $\varphi(P)$.

Problema 3. *Mostre, usado modelos finitos, que cada um dos três axiomas de incidência plana A_1, A_2, A_3 é independente dos outros dois.*

Problema 4. *As figuras seguintes exibem graficamente planos de incidência finitos. Identifique os pares de planos de incidência isomorfos.*



Problema 5. *Mostre que $A - B - C$ sse $C - B - A$.*

Problema 6. *Seja l uma linha recta, f um sistema de coordenadas para l, e A, B, C pontos distintos de l. Mostre que $A - B - C$ sse $fA - fB - fC$.*

Problema 7. *O semiplano de Poincare é o plano seguinte: os pontos são os pontos ordinarios de $\mathbb{R}^2$ com ordenada positiva, $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e as linhas podem ser de dois tipos:*

Tipo I: são as intersecções com X de linhas rectas verticais ordinárias, isto é, conjuntos da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c, y > 0\}$.

Tipo II: são as intersecções com X de circunferências ordinárias de $\mathbb{R}^2$ com centro sobre o eixo dos xx, isto é, conjuntos da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$, com a real e r real positivo.

(a) Mostre que o semiplano de Poincaré é modelo dos axiomas de incidência, mas não é plano afim. Neste plano é válido o

AXI'OMA HIPERBOLICO DE PARALELISMO:

Para toda a linha l e todo o ponto $P \notin l$, existem, pelo menos, duas paralelas a l passando por P.

(b) Determine a única linha que passa pelos pontos $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 1)$, e indique duas paralelas a essa linha.

Problema 8. *Diga, justificando, se a intersecção de conjuntos convexos é convexa.*

Problema 9. *Diga, justificando, se a união de conjuntos convexos é convexa.*

Problema 10. *Recorde que um quadrilátero diz-se convexo se cada lado está contido num semiplano limitado pelo lado oposto. Mostre que:*

a) Um quadrilátero é convexo sse o vértice de cada ângulo é interior ao ângulo oposto.

b) as diagonais de um quadrilátero convexo cortam-se num ponto.