ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

E-fólio global

I. Na **Questão 1** podemos calcular o determinante de A aplicando a regra de Laplace à última coluna e obter $\det A = -x \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$.

Aplicando novamente a regra de Laplace à primeira linha tem-se $\det A = -x \times 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & x \end{pmatrix} = -x(x-2)$. Concluímos que a resposta certa é a alínea d). Pelo que vimos podemos concluir que a alínea a) é falsa, a alínea b) só é verdadeira quando $x = 0$, e a única matriz 4×4 que satisfaz a alínea c) é a matriz nula.

Na **Questão 2** tem-se $g(1,1,1) = (1,1,1) \neq (0,0,0)$ logo a alínea a) é falsa.

Tem-se $f\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (1,0,1)$ e $g(1,0,1) = (1,1,0)$ e portanto a alínea b) é verdadeira.

Por definição $\operatorname{Nuc} f = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : f(M) = (0,0,0)\}$, e atendendo à definição de f isso corresponde a $(a,b,c+d) = (0,0,0)$, ou seja às matrizes da forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$.

Análogamente o núcleo de $g \circ f$ é definido por $\operatorname{Nuc}(g \circ f) = \{M \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (g \circ f)(M) = (0,0,0)\}$, ou seja, usando as definições de f e de g, $(c+d, a, b) = (0,0,0)$, e portanto $c + d = 0, a = 0$ e $b = 0$. Obtemos portanto as matrizes da forma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & -c \end{pmatrix}$.

Portanto as alíneas c) e d) são falsas.

Na **Questão 3** (*do exame*) era necessário ver que a matriz A era invertível *antes* de usar A^{-1}; como $A^2 = I_n$ tem-se $\det(A^2) = \det I_n = 1$, e portanto $\det A = \pm 1 \neq 0$. Fica assim garantida a existência de A^{-1}. A existência de A^{-1} implica que $A = A^{-1}$, bastando multiplicar a igualdade $A^2 = I_n$ por A^{-1}.

Assim a alínea a) é sempre falsa, as alíneas b) e d) são falsas em geral e a alínea c) é verdadeira.

Na **Questão 3** (*do e-fólio global*) é fácil ver que a alínea a) é falsa pois a dimensão de um subespaço de $\mathbb{R}^3$ não pode ser superior à dimensão do próprio espaço, que neste caso é 3.

Como $(1,2,2) = 2 \times (0,1,1) + (1,0,0)$ e os 2 vetores $(1,0,0)$ e $(0,1,1)$ são linearmente independentes, temos que $F = \langle (1,0,0),(0,1,1)\rangle$. Portanto a dimensão de F é 2.

Como $(1,1,1) = (1,0,1) + (0,1,0)$ e os 2 vetores $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ são linearmente independentes, temos que $G = \langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle$. Portanto a dimensão de G é 2.

Vejamos agora o que é o subespaço $F \cap G$. Já vimos que tanto F como G têm dimensão 2, pelo que o subespaço $F \cap G$ pode ter dimensão 0, 1 ou 2. Por definição $(1,1,1) \in G$ e como $(1,1,1) = (0,1,1) + (1,0,0)$, $(1,1,1)$ também pertence a F. Concluímos então que a dimensão de $F \cap G$ é 1 ou 2. A dimensão de $F \cap G$ não pode ser 2 pois isso quereria dizer que $F = G$, visto que ambos têm dimensão 2.

Uma vez que não se tem $F \subset G$ nem $G \subset F$, então $F \cup G$ não é um subespaço pelo que não faz sentido falar na sua dimensão.

Resumindo, a alínea verdadeira é a alínea b).

II. A afirmação é verdadeira.

Consideremos em $\mathbb{R}_2[x]$ a base $\left(1,t,t^2\right)$ e em $\mathbb{R}^3$ a base $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Identificando $\mathbb{R}_2[x]$ com $\mathbb{R}^3$ (porquê?), basta provar que a sequência formada pelo três vetores $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, o que resulta do facto da matriz $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$ ter característica 3.

III. Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Os valores próprios da matriz A são as soluções de $\det(A - \lambda I_3) = 0$, ou seja de

$$\det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Usando a primeira linha para calcular este determinante tem-se

$$(-3-\lambda)((3-\lambda)^2 - 4) = (-3-\lambda)(-\lambda+1)(-\lambda+5).$$

Os valores próprios da matriz A são -3, 1 e 5.

b) O espaço próprio associado ao valor próprio -3 é gerado pelo vetor $(1,0,0)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 1 é gerado pelo vetor $(0,1,-1)$.

O espaço próprio associado ao valor próprio 5 é gerado pelo vetor $(0,1,1)$.

c) A matriz A é diagonalizável pois é uma matriz 3×3 com 3 valores próprios distintos, e portanto tendo em conta a ordem dos valores próprios na matriz dada, existe uma matriz invertível P que tem por colunas os vetores próprios pela mesma ordem, ou seja $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

IV. **a)** O núcleo de T consiste nas matrizes cuja imagem por T é a matriz nula. Olhando para a definição da aplicação T, a única matriz que tem por imagem a matriz nula é a matriz nula. Portanto $\dim \mathrm{Nuc}\ T = 0$ e pelo Teorema da Dimensão , $4 = 0 + \dim \mathrm{Im}\ T$, e portanto a dimensão da imagem de T é 4.

b) Identificando $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^4$, por exemplo usando o isomorfismo entre as bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}^4$, associamos a um elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o elemento (a,b,c,d) de $\mathbb{R}^4$. Assim a matriz que representa T obtem-se calculando a imagem dos elementos da base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Tem-se

- $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$;
- $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

E portanto $M\left(\text{b.c.}_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}, \text{b.c.}_{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}, T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Já vimos na alínea a) que o núcleo de T se reduz à matriz nula, ou que equivale a dizer que T é invertível. A matriz que representa a inversa da transformação T é precisamente $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

V. a) S é obviamente um subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Tem-se

* $M^T 0 = 0 M^T = 0$,
* $M^T(X+Y) = M^T X + M^T Y = X M^T + Y M^T = (X+Y)M^T, \forall X, Y \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$,
* $M^T(\lambda X) = \lambda\left(M^T X\right) = \lambda\left(X M^T\right) = (\lambda X)M^T, \forall X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Concluímos assim que S é um subespaço de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

b) Para $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ temos que a condição $M^T X = X M^T$ é equivalente a $c = 0$ e $a = b + d$. Portanto S é definido pelas matrizes 2×2 da forma

$$\begin{pmatrix} b+d & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = bM^T + dI_2.$$

Assim, S é gerado pelas matrizes M^T e I_2, que são linearmente independentes (porquê?). A dimensão de S é 2.

FIM