ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 8 a 18 de janeiro de 2021

Data de Limite de Entrega

18 de janeiro de 2021, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Espaços Vetoriais. Aplicações Lineares. Valores e Vetores Próprios.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes, determinantes, valores e vetores próprios.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira; deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.
É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta.

Os Grupos têm a cotação de 1 valor cada.

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 14 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega.
Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Seja A uma matriz 3×3, e $p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda$ o seu polinómio característico. Considere as seguintes afirmações:

i) $\operatorname{tr} A = 0$.

ii) $\det A = 0$.

iii) A é diagonalizável.

iv) A não tem subespaços próprios de dimensão 2.

Então a lista completa de afirmações verdadeiras é:

☐ **a)** i), ii) e iii).

☐ **b)** iii) e iv).

☐ **c)** i) e iii).

☐ **d)** ii), iii) e iv).

2. Seja E um espaço de dimensão 5, e considere F, G e H subespaços lineares de E tais que $\dim F = 1$, $\dim G = 2$, $\dim H = 3$ e $F \subset G$. Então:

☐ **a)** $E = G + H$.

☐ **b)** $\dim(G+H) = 3$.

☐ **c)** $\dim(F+G) = 2$.

☐ **d)** $\dim(F\cap G) = 2$.

3. Seja $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ a aplicação linear tal que $h(A) = A + A^\top$, e seja

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então a matriz que representa h em relação à base $\mathcal{B}$ é:

☐ **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

☐ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Considere as aplicações definidas por:

1. $f\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $f(A) = \mathrm{adj}A$;
2. $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (x,y,x(x+y))$;
3. $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $p(a,b,c) = (a,a,a,a)$;
4. $h\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $h(A) = \det A + \det\left(A^\top\right)$.

Então:

- ☐ **a)** Só f e p são aplicações lineares.
- ☐ **b)** Só g é uma aplicação linear.
- ☐ **c)** Só p é uma aplicação linear.
- ☐ **d)** Só g e h são aplicações lineares.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere a aplicação linear $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por

$$f(a,b,c,d) = ax^2 + bx + a + b,\ \forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4.$$

Considere a base de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{B}_1 = ((2,0,0,0), (-1,1,0,0), (1,1,2,0), (2,1,1,1))$, e a base de $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}_2 = \left(1,\ x^2,\ x\right)$.

i) Determine justificadamente $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2)$.

ii) Considere a base de $\mathbb{R}_2[x]$, $\mathcal{B}_2' = \left(x^2+x+1,\ x+1,\ 1\right)$.
Determine justificadamente a matriz de mudança de base $Q \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2') = QA$.

III. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

i) Determine justificadamente os valores próprios da matriz A.

ii) Determine justificadamente o espaço próprio associado a cada um dos valores próprios da matriz A.

iii) Determine justificadamente a multiplicidade algébrica e a a multiplicidade geométrica de cada valor próprio da matriz A.

IV. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz que satisfaz $A^2 + A - 6I_n = 0$.

i) Mostre justificadamente que A é invertível e determine a sua inversa A^{-1}.

ii) Mostre justificadamente que se λ é um valor próprio de A então $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$.

iii) Mostre justificadamente que -2 não é um valor próprio de A.

FIM