Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

1. Temos que $n^2+1 = n(n+1)-(n-1)$ logo como estamos a assumir que n^2+1 é divisível por $n+1$ teremos que $n-1$ é divisível por $n+1$. Mas tal só será possível quando $n=1$. Logo o conjunto A terá apenas um elemento e **B)** é a opção verdadeira.

2. Tomando $n=0$ teremos os números 1 e 4 e como mdc$(1,4)=1$ é claro que são primos entre si (a opção **A)** fica liminarmente excluída). Tomando $n=1$ teremos os números 3 e 13 e como mdc$(3,13)=1$ (a opção **B)** fica liminarmente excluída). Consideramos agora $n \geq 2$. Pelo algoritmo de Euclides

$$\begin{cases} 9n+4 = 4\times(2n+1)+\overbrace{n}^{<2n+1} \\ 2n+1 = 2\times n+\overbrace{1}^{<n} \end{cases}$$

e mdc$(9n+4, 2n+1)=$ mdc$(2n+1,n)$ e mdc$(2n+1,n)=$ mdc$(n,1)=1$. Logo o conjunto A coincide com $\mathbb{N}$ sendo **C)** a opção verdadeira.

3. Começamos por aplicar a fórmula da diferença de quadrados:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

para obter

$$326^2-325^2=(326+325)(326-325)=651\times 1=651.$$

Como 651 é divisível por 3 (uma vez que pelo critério de divisibilidade por 3 temos $6+5+1=12$ e 12 é múltiplo de 3) teremos que ter em:

$$326^2-325^2 \equiv k \,(\text{mod}\, 3),$$

o valor $k=0$ sendo **A)** a opção verdadeira.

4. É claro que

$$17 \equiv 2 \,(\text{mod}\, 5). \tag{1}$$

Logo elevando ao quadrado usando a compatibilidade com o produto nas congruências temos $17^2 \equiv 2^2 \,(\text{mod}\, 5)$. Equivalentemente $17^2 \equiv -1 \,(\text{mod}\, 5)$ pois $4 \equiv -1 \,(\text{mod}\, 5)$. Elevando novamente ao quadrado usando a compatibilidade com o produto nas congruências temos $17^4 \equiv 1 \,(\text{mod}\, 5)$. Finalmente, elevando desta vez à potência 85 (pois $340 = 85 \times 4$) e usando a compatibilidade com o produto nas congruências temos

$$17^{340} = (17^4)^{85} \equiv 1^{85} \,(\text{mod}\, 5) = 1 \,(\text{mod}\, 5).$$

Multiplicando por 17 (compatibilidade com o produto novamente) temos

$$17^{341} = 17^{340} \times 17 \equiv 1 \times 17 \,(\text{mod}\, 5) = 17 \,(\text{mod}\, 5) \overset{(1)}{=} 2 \,(\text{mod}\, 5).$$

Logo a opção verdadeira é a opção **C)**.

5. Se $n = 1$ teremos $\Psi(1) = \text{mdc}(2, 2) = 2$ ✓ confirmando que $\Psi(n) = 2$ sendo $n = 1$ ímpar. Para verificarmos a validade para $n \geq 2$ iremos usar o algoritmo de Euclides. Temos $\Psi(n) = \text{mdc}(n+1, n^2+1)$ e recordando a diferença de quadrados dada por $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ escrevemos

$$n^2 + 1 = (n+1) \times (n-1) + 2. \tag{2}$$

Como $2 < n + 1$ temos que (2) representa a primeira iteração do algoritmo de Euclides para o par $n^2 + 1$, $n + 1$. Novamente pelo algoritmo de Euclides (mais concretamente pelo Lema 1.4 dos apontamentos de divisibilidade) temos

$$\text{mdc}(n^2 + 1, n + 1) = \text{mdc}(n + 1, 2).$$

Se n for par teremos que $\Psi(n) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 1$ e se n for ímpar teremos $\Psi(n) = \text{mdc}(n + 1, 2) = 2$ comprovando assim o pretendido.

6. Pelo Teorema de Bachet-Bézout dados $a, b \in \mathbb{N}$ existem $x, y \in \mathbb{Z}$ com

$$ax + by = \text{mdc}(a, b).$$

Consequentemente,

$$p^{\text{mdc}(a,b)} \quad = \quad p^{ax+by} = p^{ax} \times p^{by} = (p^a)^x \times (p^b)^y.$$

Notemos que x e y têm que ter sinais contrários. Assumimos que $x > 0 > y$ (o caso $y > 0 > x$ é análogo e os casos $x = 0$ ou $y = 0$ são triviais).

Por compatibilidade com o produto nas congruências e pela hipótese

$$p^a \equiv 1 \,(\text{mod}\, n) \;\text{ e }\; p^b \equiv 1 \,(\text{mod}\, n)$$

temos que

$$(p^a)^x \equiv 1^x \,(\text{mod}\, n) \;\text{ e }\; (p^b)^{-y} \equiv 1^{-y} \,(\text{mod}\, n),$$

onde também temos $1^x = 1^{-y} = 1$. Novamente pela compatibilidade com o produto nas congruências

$$(p^a)^x (p^b)^{-y} \equiv \overbrace{1^x 1^{-y}}^{1} \,(\text{mod}\, n) \tag{3}$$

e

$$(p^{ax})^2 \equiv 1^2 \,(\text{mod}\, n). \tag{4}$$

Logo a compatibilidade com a soma em (3) garante

$$\overbrace{(p^a)^x (p^b)^y}^{p^{\text{mdc}(a,b)}} (p^a)^x (p^b)^{-y} \equiv \overbrace{(p^a)^x (p^b)^y}^{p^{\text{mdc}(a,b)}} \,(\text{mod}\, n).$$

Simplificando temos

$$(p^{ax})^2 \equiv p^{\text{mdc}(a,b)} \,(\text{mod}\, n).$$

Portanto, usando transitividade nas congruências e (4) obtemos

$$p^{\text{mdc}(a,b)} \equiv 1 \,(\text{mod}\, n).$$

7. **a)** Como $3^3 - 1 = 27 - 1 = 26 = 13 \times 2$ é claro que $3^3 \equiv 1 \,(\text{mod}\, 13)$. Agora, usando a compatibilidade com o produto concluímos que para todo o $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$(3^3)^n \equiv 1^n \,(\text{mod}\, 13).$$

Temos então provado que $3^{3n} \equiv 1 \,(\text{mod}\, 13)$.

b) Seja $P(n) = 3^{3n+3} - 26n - 27$. Começamos por considerar o 'caso base'. Assim, tomando $n = 1$ teremos que verificar se $169 | P(1)$ ou seja se $3^6 - 26 - 27$ é divisível por 169. Mas $676 = 4 \times 169$ logo o caso base vale. Vejamos agora o 'passo da indução' que indica que

$3^{3n+3} - 26n - 27$ é divisível por 169 e vejamos o que acontece para o caso $n+1$. Começamos por notar que:

$$\begin{aligned}
\overbrace{3^{3(n+1)+3} - 26(n+1) - 27}^{P(n+1)} - (\overbrace{3^{3n+3} - 26n - 27}^{P(n)}) &= 3^{3(n+1)+3} - 3^{3n+3} - 26 \\
&= 3^{3n+3}(3^3 - 1) - 26 \\
&= 26(3^{3n+3} - 1).
\end{aligned}$$

Usando a alínea **a)** obtemos diretamente que 13 divide $3^{3(n+1)} - 1 = 3^{3n+3} - 1$. Como 13 também divide 26 concluímos que $13 \times 13 = 169$ divide $26(3^{3n+3} - 1)$. Juntando o passo de indução que garante que 169 divide $P(n)$ obtemos que 169 também divide $P(n+1)$.

8. Temos que $37800 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$. Teremos portanto que um número natural é um divisor positivo de 37800 se e somente se for escrito na forma;

$$2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta,$$

onde $\alpha = \{0,1,2,3\}$, $\beta = \{0,1,2,3\}$, $\gamma = \{0,1,2\}$ e $\delta = \{0,1\}$. Como pretendemos contar os divisores positivos de 37800 que não são múltiplos de 6, temos de excluir as potências simultâneas de 2 e 3, ou seja, os divisores pretendidos são da forma

$$2^\alpha \times 3^0 \times 5^\gamma \times 7^\delta \text{ e } 2^0 \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta$$

com α, β, γ e δ como acima. Existem portanto

$$\#\{0,1,2,3\} \times \#\{0\} \times \#\{0,1,2\} \times \#\{0,1\} = 24,$$

mais

$$\#\{0\} \times \#\{0,1,2,3\} \times \#\{0,1,2\} \times \#\{0,1\} = 24,$$

divisores nas condições pretendidas. Contudo, existiu uma sobrecontagem aquando da consideração de $\alpha = \beta = 0$ que são 6 casos. Finalmente, teremos $24 + 24 - 6 = 42$ divisores possíveis.

FIM