Orientação de trabalho:

Continue o estudo do Capítulo 1 - secção 1.2 (pág. 37 a 49 do manual)

Secção 1.2: *Coeficientes binomiais*

Nesta secção irá aprender/relembrar os conceitos:

- princípio de indução matemática (ver página seguinte);
- coeficiente binomial, binómio de Newton;
- igualdades binomiais;
- coeficiente multinomial.

Esta secção está disponível em `http://www.univ-ab.pt/~matalrbc/mf/seccao12.pdf`.

Veja, também, a página web de apoio no tópico 4, ou clique directamente no link:
`http://www.univ-ab.pt/~matalrbc/tc/tc1.html`
Em particular, consulte as páginas:

- *Princípios básicos de contagens* (página 2): nesta página deverá ler as subsecções 2.1, 2.2 e 2.3, sobre o princípio da multiplicação, da adição e do complementar. Os dois primeiros princípios fundamentam a diferença entre multiplicar e somar contagens. O princípio do complementar aplica-se quando a uma contagem geral queremos excluir contagens particulares.
- *Agrupamentos* (página 3): esta página explica os diferentes tipos de agrupamentos que podemos ter.
- *Permutações e arranjos* (página 4): nesta página encontra as definições de potência decrescente = arranjo sem repetição e de permutação. Veja os exemplos 1 a 6.
- *Combinações* (página 5): nesta página encontra as definições de coeficiente binomial, binómio de Newton e as igualdades binomiais mais importantes. Veja os exemplos 1, 2.
- *Permutações com repetição* (página 6): nesta página deverá ler as subsecções 6.1 e 6.2 acerca do coeficiente multinomial. Veja os exemplos 1, 2-(a) e 3. O exercício 2-(b) usa o princípio da inclusão/exclusão que será estudado na próxima semana.

Esta página complementa o estudo da secção 1.2 do manual, mas não o substitui.

Resolva os exercícios propostos na Folha 2 (= exer. das pág. 49 a 52 do manual).

Competências a adquirir: saber

- aplicar o princípio de indução matemática;
- aplicar as igualdades binomiais;
- interpretar e contar os elementos de conjuntos finitos.

Princípio de Indução Matemática

Quando temos afirmações acerca de todos os números naturais podemos usar um método conhecido por MÉTODO DE INDUÇÃO MATEMÁTICA e que pode ser enunciado por:

> Seja $P(n)$ uma proposição em $\mathbb{N}$. Se
>
> (1) $P(n_0)$ for verdadeira, e
>
> (2) $\forall n \geq n_0\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ for verdadeira
>
> então, também, é verdadeira em $\mathbb{N}$ a proposição $\forall n \geq n_0\ P(n)$.

(1) - é o *caso base*;

(2) - é o *passo de indução*. O antecedente da implicação "$P(n)$" é chamado a *hipótese de indução* e o consequente "$P(n+1)$" a *tese de indução*.

O que este método diz é que:

> "Se dada condição sobre os números naturais é verdadeira para um número concreto n_0 e se sempre que ela é verdadeira para $n \geq n_0$ também o é para o seu sucessor $n+1$ então a condição $P(n)$ é uma proposição verdadeira para todos os números naturais $\geq n_0$"

A ideia de indução pode ser ilustrada pela seguinte situação. Imaginemos uma fila infinita de soldadinhos numerados, por números naturais consecutivos ([1]) , e suponhamos que eles estão dispostos de tal modo que se qualquer um deles cai, digamos o que tem número n, ele bate no seguinte, isto é no que tem número $n+1$, e este também cai. Assim, se o primeiro soldado a cair for n_0 então cairá o n_0+1, depois o n_0+2, e assim sucessivamente. Portanto, todos os soldados a partir do n_0 cairão. Outro exemplo clássico é o das peças de dominó indicado no manual.

Existe uma outra versão do método de indução, o MÉTODO DE INDUÇÃO COMPLETA, que será estudado no tema 3.

Breve nota histórica

O conceito de indução matemática aparece, formulado de maneira abstracta, pela primeira vez na obra "Traité du Triangle Arithmétique", escrita no século XIX pelo matemático francês Blaise Pascal. No entanto, é também reconhecida uma certa forma de indução matemática, uma forma arcaica, nos trabalhos do matemático italiano Giovanni Vacca do século XVI.

[1] Números naturais CONSECUTIVOS são números da forma n, $n+1$.

Coeficientes binomiais (secção 1.2)

1. De quantas maneiras possíveis se podem sentar cinco pessoas:
   (a) Numa fila?
   (b) Em círculo, considerando apenas a posição relativa das pessoas?

2. Cinco rapazes e cinco raparigas vão sentar-se numa bancada. Indique de quantas maneiras se podem sentar, para cada uma das seguintes condições:
   (a) Os rapazes sentam-se todos nos cinco lugares à esquerda.
   (b) Nenhum par de rapazes se senta em lugares contíguos.
   (c) O Pancrácio e a Engrácia têm de ficar lado a lado.

3. Admita que $x_0 = 0$ e que $x_{n+1} = x_n + 2n + 2$. Mostre, por indução, que $x_n = n(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Mostre por indução que:
   (a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, para $n \geq 1$.
   (b) para todo $n \geq 1$, 3 divide $n^3 + 2n$.
   (c) $(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 1 = \frac{(2n)^{\underline{n}}}{2^n}$, para $n \geq 1$.
   (d) $(n+1)! = 1 + \sum_{j=0}^{n} j(n+1)^{\underline{n-j}}$.
   (e) $x^{\underline{k}} \cdot x = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}}$.

   Nota prévia: (ao exercício 5.)

   As potências factoriais crescentes e decrescentes são definidas como um polinómio que poderá tomar valores reais:

   $$x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k-1) \quad \text{e} \quad x^{\overline{k}} = x(x+1)\cdots(x+k-1) \quad \text{com } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}.$$

   Quando a variação é nos números naturais tem-se

   $$n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{se } k, n \in \mathbb{N}, k \leq n.$$

   A noção de factorial é somente definida nos naturais. Esse conceito pode ser estendido aos reais definindo factorial à custa de integrais, mas não é do âmbito desta u.c.

5. (a) Mostre, por indução, que $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$.
   (b) Substituindo x por $-x$ na igualdade da alínea anterior, conclua que $(-x)^{\overline{k}} = (-1)^k x^{\underline{k}}$.

6. (a) Qual é o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1+x)^{11}$?
   (b) Qual é o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(3-4x)^6$?
   (c) Qual é o desenvolvimento de x^2y^5 no desenvolvimento de $(ax+by)^7$?

7. Num exame fez-se a seguinte pergunta: Quantas palavras de cinco caracteres se podem escrever com as letras a, b, c e d, de modo a que cada letra apareça pelo menos uma vez?

   Um dos alunos, o Mário, respondeu do seguinte modo:

   — *Bom, primeiro reservamos quatro lugares para quatro letras: há* $\binom{5}{4}$ *maneiras de o fazer. Para cada um desses quatro lugares há* $4!$ *maneiras de colocar as quatro letras. Depois, no lugar restante, podemos colocar uma letra qualquer. A resposta é, portanto,* $\binom{5}{4}4!4$.

   Um outro aluno, o Rui, respondeu assim:

   — *Se há cinco lugares para quatro letras, então uma das letras aparecerá repetida. E apenas uma, já que todas as letras têm que aparecer. Há* $\binom{5}{2}$ *maneiras possíveis de colocar a letra que se repete, e nos três restantes lugares colocam-se as outras três letras. Como tal, a resposta é* $4\binom{5}{2}3!$.

   Quem respondeu certo? Justifique a sua resposta!

8. (a) Num baralho de 52 quantas mãos de cinco cartas é que existem?
   (b) E quantas mãos de cinco cartas com exactamente dois ouros é que existem?

9. Indique qual a alínea que responde ao seguinte problema: Um homem tem dez amigos. De quantas maneiras pode ele ir jantar com dois ou mais amigos?

   (a) $\displaystyle\prod_{i=2}^{10}\binom{10}{i}$;
   (b) $\displaystyle\sum_{i=2}^{10}10^i$;
   (c) 8;
   (d) $2^{10}-11$;
   (e) $10\cdot 9+10\cdot 9\cdot 8+\cdots+10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$.

10. Quantas maneiras há de re-arranjar as letras das seguintes palavras?

    (a) DRACONIANO
    (b) CICERONE
    (c) INFINITO

11. Quantas maneiras há de re-arranjar as letras das seguintes palavras de modo a que não apareçam vogais consecutivas?

    (a) BOLA
    (b) GORGONZOLA
    (c) FINITO

    [*Sugestão:* Primeiro trate das consoantes.]

12. Quantas sequências binárias de comprimento n contêm exactamente k zeros, nenhum dos quais consecutivos?

13. Quantas sequências binárias de comprimento $2n$ é que existem ...

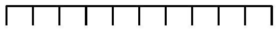
    (a) ... em que nas n primeiro entradas apenas aparece o 1?

    (b) ... em que o número de zeros é igual ao número de uns?

    (c) Justifique que o número de sequências binárias de comprimento $2n$ em que existem mais zeros que uns é $\frac{1}{2}\left(2^{2n} - \binom{2n}{n}\right)$.

14. Na demonstração da lei de Pascal diz-se que o conjunto $\{A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \in A\}$ tem cardinalidade $\binom{n-1}{k-1}$. Qual é a correspondência biunívoca que justifica esta afirmação?

15. Sete automóveis diferentes estão estacionados num parque de estacionamento que tem o seguinte aspecto:

    JARDIM  FACULDADE

    (a) Quantas são as maneiras possíveis de estacionar?

    (b) Desses sete automóveis, três pertencem a assistentes e quatro a professores. Sabendo que os automóveis dos assistentes estão estacionados mais longe da faculdade do que os automóveis dos professores, quantas são as configurações possíveis desse estacionamento.

16. (a) Mostre através de um argumento combinatorial que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}.$$

    [*Sugestão:* Use um raciocínio semelhante ao que se fez quando se demonstrou a lei de Pascal.]

    (b) Utilizando uma igualdade similar à apresentada na alínea anterior, escreva $\binom{k}{i}$ em termos de coeficientes binomiais da forma "combinações $k-3$ tomadas *qualquer coisa a qualquer coisa*".

17. Mostre que

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = n\binom{2n}{n} \ldots$$

    (a) ... por meio da fórmula da expansão factorial.

    (b) ... através de um argumento combinatorial.

18. Obtenha a igualdade

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

    como caso particular da convolução de Vandermonde.

19. (a) Considere o coeficiente binomial $\binom{9}{5}$. Proceda à sua expansão, de acordo com a fórmula de Pascal, bifurcando, em cada passo, apenas no índice inferior mais alto.

    (b) Demonstre a *adição do índice superior*, por meio de um argumento combinatorial.

20. Deduza a *fórmula do binómio descendente*, dada por

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

onde $x, y \in \mathbb{N}$ (de facto, a fórmula é válida para números complexos arbitrários).
[*Sugestão:* Divida ambos os membros por $n!$ e utilize a convolução de Vandermonde.]

21. Mostre, por indução, que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} \left(\frac{r}{2} - k\right) = \frac{m+1}{2} \binom{r}{m+1}.$$

*22 Uma sequência finita diz-se *unimodal* se vai crescendo até certa altura e a partir daí decresce. Mostre que a sequência

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$$

é unimodal.
[*Sugestão:* Mostre, por indução em n, que $\binom{n}{i} < \binom{n}{j}$ para $i < j \leq \frac{n}{2}$.]

23 Fez o dois últimos exercícios? Em caso afirmativo, penso que domina razoavelmente bem o princípio da indução matemática. Mas, será que não lhe escapou nada? Eis um quebra-cabeças.

"Vamos demonstrar que todos os cavalos têm a mesma cor. O número de cavalos é finito, pelo que vamos demonstrar que qualquer colecção de n cavalos é constituída por cavalos da mesma cor. A demonstração é por indução em n. Se n é igual a 1, estamos na presença de uma colecção com um só cavalo. Logo, todos os cavalos desta colecção têm a mesma cor. Consideremos, agora, uma colecção de $n+1$ cavalos $X = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$. Cada uma das colecções $Y = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ e $Z = \{c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}\}$ tem n cavalos. Por hipótese de indução, os cavalos em Y têm todos a mesma cor, e os cavalos em Z também têm todos a mesma cor. Logo, todos os cavalos em X têm a mesma cor."

O que é que correu mal?

24 Qual é o coeficiente de $xy^2w^3z^4$ no desenvolvimento de $(4x+3y+2z+w)^{10}$?

Folha 2: Soluções

1. (a) $5!$ (b) $5!/5 = 4!$

2. (a) $5!\,5!$ (b) $5!\,6!$ (c) $2 \cdot 9!$

6. (a) $\binom{11}{5} = \binom{11}{6}$ (b) $\binom{6}{3}\, 3^3\,(-4)^3 = -\binom{6}{3} 12^3$ (c) $\binom{7}{5}\, a^2\, b^5 = \binom{7}{2}\, a^2\, b^5$

7. O Rui respondeu certo. O Mário faz uma sobrecontagem pois conta cada situação duas vezes.

8. (a) $\binom{52}{5}$ (b) $\binom{13}{2}\binom{39}{3}$

9. A resposta correcta é a (d).

10. (a) $\binom{10}{2,2,2,1,1,1,1} = \binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2} 4! = \dfrac{10!}{2!\,2!\,2!}$

    (b) $\binom{8}{2,2,1,1,1,1} = \binom{8}{2}\binom{6}{2} 4! = \dfrac{8!}{2!\,2!}$

    (c) $\binom{8}{3,2,1,1,1} = \binom{8}{3}\tbinom{5}{2} 3! = \dfrac{8!}{3!\,2!}$

11. (a) $2!\binom{3}{2} 2!$ (b) $\dfrac{6!}{2!}\binom{7}{4}\dfrac{4!}{3!}$ (c) $3!\binom{4}{3}\dfrac{3!}{2!}$

12. $\binom{n-k+1}{k}$

13. (a) 2^n (b) $\dfrac{(2n)!}{n!\,n!} = \binom{2n}{n}$ (c) $\dfrac{1}{2}\left(2^{2^n} - \binom{2n}{n}\right)$

14. Seja $X = \{\, A \in \mathcal{P}_k([n])\colon n \in A \,\}$. A afirmação $\#X = \binom{n-1}{k-1}$ é justificada pela bijecção $\Phi\colon X \to \mathcal{P}_{k-1}([n-1])$ definida por $\Phi(A) = A \setminus \{n\}$, pra todo $A \in X$.

15. (a) $10^{\underline{7}} = \binom{10}{7} \cdot 7!$ (b) $\binom{10}{7} \cdot 3! \cdot 4!$

16. (b) $\binom{k}{i} = \binom{k-3}{i} + 3\binom{k-3}{i-1} + 3\binom{k-3}{i-2} + \binom{k-3}{i-3}$.

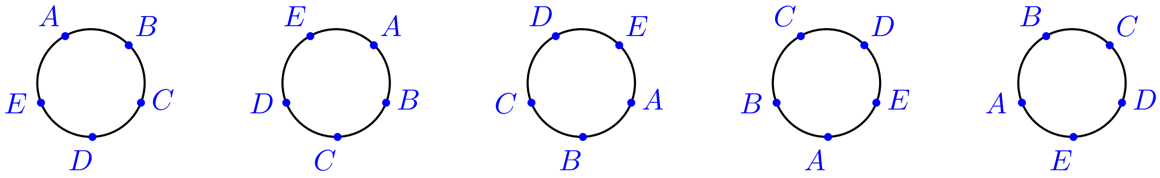
18. Use a lei da simetria e a convolução de Vandermonde.

23. O argumento não funciona para o passo da indução que vai das colecções de um cavalo para as colecções de dois cavalos.

24. $\binom{10}{1,2,4,3} 4 \cdot 3^2 \cdot 2^4 = \dfrac{10!}{1!\,2!\,4!\,3!} \cdot 576$

1. **(a)** Há 5! maneiras, porque este problema é equivalente a formar todas as sequências (ordenadas) de 5 objectos sem repetição.

(b) As rotações do círculo não mudam a posição relativa das pessoas:



Como há cinco rotações possíveis, a resposta é $5!/5 = 4!$.

2. Coincide com o exercício 13 da AF1 e terá resolução detalhada no RAF1.

3. Para $n = 0$, $n(n+1) = 0$, como se queria verificar (caso base). Suponhamos, por hipótese de indução, que se tem $x_n = n(n+1)$ para um dado n. Então, vem: $x_{n+1} = x_n + 2n + 2 = n(n+1) + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$ — a primeira igualdade vale por hipótese, enquanto a segunda vale por hipótese de indução.

4. **(b)** Em primeiro lugar, "3 divide $n^3 + 2n$" é o mesmo que "'$n^3 + 2n$ é múltiplo de 3", denota-se por $3 \mid n^3 + 2n$ e significa que existe um número natural k tal que $n^3 + 2n = 3k$. Procedamos então à demonstração. Para começar, temos de provar

$$3 \mid (1^3 + 2 \times 1) \qquad \text{(Base de Indução)}$$

mas isto é evidentemente verdade $(3 = 3 \times 1)$. Admitamos em seguida que

$$3 \mid (n^3 + 2n) \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

para provar que

$$3 \mid ((n+1)^3 + 2(n+1)) \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Por hipótese de indução, podemos escrever $n^3 + 2n = 3k$, onde k é um certo número natural. Temos então

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + 3n^2 + 3n + 3 \\ &\underset{\text{hip. ind.}}{=} 3k + 3n^2 + 3n + 3 = 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

(e) A base de indução consiste em

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{\underline{0}} \cdot x = x^{\underline{1}} + 0x^{\underline{0}} \qquad \text{(Base de Indução)}$$

e é verdadeira, visto que ambos os membros têm o valor x. Admitimos que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{\underline{k}} \cdot x = x^{\underline{k+1}} + kx^{\underline{k}} \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

com vista a provar que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^{\underline{k+1}} \cdot x = x^{\underline{k+2}} + (k+1)x^{\underline{k+1}} \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Note-se que $x^{\underline{k+1}} = x(x-1)^{\underline{k}}$; assim,

$$\begin{aligned}
x^{\underline{k+1}} \cdot x &= x(x-1)^{\underline{k}} x = x(x-1)^{\underline{k}}(x-1+1) = x\left((x-1)^{\underline{k}}(x-1) + (x-1)^{\underline{k}}\right) \\
&\underset{\text{hip. ind.}}{=} x\left((x-1)^{\underline{k+1}} + k(x-1)^{\underline{k}} + (x-1)^{\underline{k}}\right) = x\left((x-1)^{\underline{k+1}} + (k+1)(x-1)^{\underline{k}}\right) \\
&= x(x-1)^{\underline{k+1}} + (k+1)x(x-1)^{\underline{k}} = x^{\underline{k+2}} + (k+1)x^{\underline{k+1}}
\end{aligned}$$

5. O caso base $k = 0$ dá origem à igualdade $1 = 1$ e, portanto, vale. Suponhamos, por hipótese de indução, que se tem $(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k x^{\overline{k}}$ para um dado k. Vem:

$$(-x)^{\underline{k+1}} = (-x)^{\underline{k}}(-x-k) = (-1)^k x^{\overline{k}}(-1)(x+k) = (-1)^{k+1}x^{\overline{k+1}}$$

— a primeira igualdade vale por definição de potência decrescente, enquanto a segunda vale por hipótese de indução.

6. Neste exercício usa-se o binómio de Newton:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}} \quad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{C} \text{ e } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Temos

$$(1+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} 1^k x^{11-k} = \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} x^{11-k}.$$

Portanto o coeficiente de x^5 obtém-se quando $11 - k = 5$, ou seja $k = 6$. Este coeficente é, pois, $\binom{11}{6} = \binom{11}{5} = \frac{11!}{5!\,6!}$.

(b) Temos

$$(3-4x)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 3^k (-4x)^{6-k} = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 3^k (-4)^{6-k} x^{6-k}.$$

Portanto o coeficiente de x^3 obtém-se quando $6 - k = 3$, ou seja $k = 3$. Este coeficente é, pois, $\binom{6}{3}3^3(-4)^3 = -\binom{6}{3}12^3$.

(c) Temos

$$(ax+by)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (ax)^k (by)^{7-k} = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} a^k b^{7-k}\, x^k y^{7-k}.$$

Portanto o coeficiente de x^2y^5 obtém-se quando $k = 2$. Este coeficente é, pois, $\binom{7}{2}a^2b^5$.

7. O Rui respondeu certo.

O Mário faz uma sobrecontagem pois conta cada situação duas vezes. Por exemplo, temos

$$\underbrace{\boxed{\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}}\ \underline{a}}_{\text{os 4 primeiros lugares são reservados e “}a\text{” repete}} \qquad \underbrace{\underline{a}\ \boxed{\underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{a}}}_{\text{os 4 últimos lugares são reservados e “}a\text{” repete}}$$

8. **(a)** $\binom{52}{5}$ = número de subconjuntos com 5 elementos de um conjunto com 52 elementos.

(b) Existem 13 cartas de ouros e existem $52 - 13 = 39$ cartas que não são de ouros. Existem $\binom{13}{2}$ escolhas de 2 cartas de ouros de entre 13 distintas. Para cada escolha fixa temos $\binom{39}{13}$ escolhas de 3 cartas que não são de ouros. Portanto, pelo princípio da multiplicação, o números de mãos pedido é: $\binom{13}{2}\binom{39}{3}$.

9. O número de maneiras de ir jantar com j amigos é $\binom{10}{j}$. O número de maneiras de ir jantar com um qualquer conjunto de amigos é 2^{10}. A resposta correcta é a (d), pois há que excluir do 'total' o número de maneiras de ir jantar com 0 ou com 1 amigos: $2^{10} - \binom{10}{0} - \binom{10}{1} = 2^{10} - 11$.

10. **(a)** A palavra "DRACONIANO" tem 10 letras e tem 2 A's, 2 O's, 2 N's. Assim o número de maneiras distintas de re-arranjar estas letras é o número de permutações com repetição de 10 elementos tomados 2 a 2, 2 a 2, 2 a 2, 1 a 1, 1 a 1 e 1 a 1, 1 a 1 ou seja

$$\binom{10}{2,2,2,1,1,1,1} = \frac{10!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!} = \frac{10!}{2!\,2!\,2}.$$

Alternativa:

- Existem 10 posições para as letras e $\binom{10}{2}$ subconjuntos de 2 posições para a letra "A".
- Para cada escolha fixa, sobram 8 posições para as restantes e existem $\binom{8}{2}$ escolhas de 2 posições para "O".
- Para cada escolha fixa, sobram 6 posições para as restantes e existem $\binom{6}{2}$ escolhas de 2 posições para "N"
- Para cada escolha fixa, sobram 4 posições. As restantes 4 letras são distintas e podem ser permutadas de 4! maneiras.

Pelo princípio da multiplicação:

$$\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}4! = \frac{10!}{2!\,2!\,2}.$$

11. **(b)** $\frac{6!}{2!}\binom{7}{4}\frac{4!}{3!}$. O primeiro factor representa o número de maneiras de escrever as 6 consoantes (note-se que há duas iguais); o segundo o número de maneiras de escolher os 'intervalos' entre consoantes onde serão colocadas vogais; o terceiro o número de maneiras de dispor aí as vogais.

12. Em cada um dos $k-1$ intervalos entre os k *zeros*, há necessariamente um *um*. Assim, resta distribuir os restantes $n-k-(k-1)$ *uns* (bolas) pelos $k+1$ espaços (incluindo antes do primeiro e depois do último *zero*).

$$0 \quad 0 \quad 0 \; \cdots \; 0 \qquad \begin{cases} k \text{ zeros} \\ k-1 \text{ intervalos entre os zeros} \\ 2 \text{ espaços - antes do primeiro e depois do último zero} \end{cases}$$

O número de maneiras de o fazer é:

$$\binom{n-k-(k-1)+k}{n-k-(k-1)} = \binom{n-k+1}{k}$$

13. **(a)** 2^n (basta "preencher" as restantes n entradas de todas as maneiras possíveis).

(b) $\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$ - conta o número de sequências de comprimento $2n$ com n *uns* e n *zeros*.

(c) Seja S o conjunto de todas as sequências de comprimento $2n$. Consideremos os conjuntos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{s \in S \colon s \text{ tem } \textit{igual} \text{ número de 0 e 1}\}, \\ S_2 &= \{s \in S \colon s \text{ tem } \textit{mais} \text{ 0 do que 1}\}, \\ S_3 &= \{s \in S \colon s \text{ tem } \textit{menos} \text{ 0 do que 1}\}. \end{aligned}$$

Então $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ sendo a união disjunta. Temos que, por simetria, $\#S_2 = \#S_3$. Agora $S_2 \cup S_3 = \{s \in S \colon s \text{ tem } \textit{diferente} \text{ número de 0 e 1}\}$ e tem-se

$$\#(S_2 \cup S_3) = \#S \setminus \#S_1 \underset{\text{por (b)}}{=} 2^{2^n} - \binom{2n}{n}.$$

Assim

$$\#S_2 = \frac{1}{2}\#(S_2 \cup S_3) = \frac{1}{2}\left(2^{2^n} - \binom{2n}{n}\right).$$

14. Seja $X = \{\, A \in \mathcal{P}_k([n]) \colon n \in A \,\}$. A afirmação $\#X = \binom{n-1}{k-1}$ é justificada pela bijecção

$$\begin{array}{ccc} X & \to & \mathcal{P}_{k-1}([n-1]) \\ A & \mapsto & A \setminus \{n\} \end{array} \qquad \text{(justifique que é uma bijecção)}$$

Recorde-se que, *por definição*, $\#\mathcal{P}_{k-1}([n-1]) = \binom{n-1}{k-1}$.

15. (a) $10^{\underline{7}} = \binom{10}{7} \cdot 7!$ – pois temos de escolher 7 lugares de entre 10 e para cada escolha fixa os carros podem ser estacionados de 7! maneiras.

(b) O automóvel dos professores mais à esquerda ocupa, ou o quarto, ou o quinto, ou o sexto, ou o sétimo lugar a contar da esquerda. Adicionando o número de possibilidades para cada um destes casos ficamos com: $3! \cdot 4 \cdot 6^{\underline{3}} + 4^{\underline{3}} \cdot 4 \cdot 5^{\underline{3}} + 5^{\underline{3}} \cdot 4 \cdot 4^{\underline{3}} + 6^{\underline{3}} \cdot 4 \cdot 3!$.

Alternativa: $\binom{10}{7} \cdot 3! \cdot 4!$ – pois temos de escolher 7 lugares de entre 10 e para cada escolha fixa os 3 carros dos assistentes têm de ser estacionados mais à esquerda e os 4 dos professores mais à direita, logo podem ser estacionados de $3! \cdot 4!$ maneiras.

16. (a) O primeiro membro da igualdade é $\binom{k}{i} = \#\mathcal{P}_i([k])$. Tem-se

$$\mathcal{P}_i([k]) = A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup A_3 \dot\cup A_4$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k, k-1 \notin A \,\} \ , \ A_2 = \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k \in A,\ k-1 \notin A \,\} \\ A_3 &= \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k \notin A,\ k-1 \in A \,\} \ , \ A_4 = \{\, A \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k, k-1 \in A \,\} \end{aligned}$$

e $\#A_1 = \binom{k-2}{i}$, $\#A_2 = \#A_3 = \binom{k-2}{i-1}$, $\#A_4 = \binom{k-2}{i-2}$. Portanto

$$\binom{k}{i} = \binom{k-2}{i} + 2\binom{k-2}{i-1} + \binom{k-2}{i-2}.$$

(b) Neste caso, podemos escrever $\mathcal{P}_i([k])$ como união disjunta de 8 subconjuntos:

$$\mathcal{P}_i([k]) = B_1 \dot\cup B_2 \dot\cup B_3 \dot\cup B_4 \dot\cup B_5 \dot\cup B_6 \dot\cup B_7 \dot\cup B_8$$

onde os B_j são definidos tendo em conta que dado $B \subset [k]$ com i elementos então

$$\text{ou } k \in B \text{ ou } k \notin B \quad , \quad \text{ou } k-1 \in B \text{ ou } k-1 \notin B \quad , \quad \text{ou } k-2 \in B \text{ ou } k-2 \notin B.$$

Por exemplo

$$B_1 = \{\, B \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k, k-1, k-2 \notin B \,\}, \ B_2 = \{\, B \in \mathcal{P}_i([k]) \colon k \in B, k-1, k-2 \notin B \,\}, \ldots$$

Depois calcular o cardinal de cada B_j e concluir que

$$\binom{k}{i} = \binom{k-3}{i} + 3\binom{k-3}{i-1} + 3\binom{k-3}{i-2} + \binom{k-3}{i-3}.$$

17. (a) Temos

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = (n+1)\frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = n\frac{(2n)!}{n!n!} = n\binom{2n}{n}.$$

(b) A igualdade enunciada é, obviamente, equivalente a

$$(n+1)\binom{2n}{n+1} = n\binom{2n}{n}$$

Suponhamos que se pretende, dum conjunto de $2n$ pessoas, formar uma comissão composta por $n+1$ elementos, dos quais um é o presidente e n são vogais. Ambos os membros da igualdade acima contam o número de maneiras de o fazer: no primeiro caso, escolhem-se $n+1$ elementos para constituir a comissão , entre os quais, por sua vez, se escolhe o presidente; no segundo caso, escolhem-se n vogais para a comissão e escolhe-se o presidente de entre os *não* escolhidos para vogais.

Alternativa: Ambos os membros da igualdade contam o número de maneiras de formar, dentro de um conjunto de $2n$ pessoas, uma comissão composta por $n+1$ pessoas, uma das quais é o presidente e as outras n os vogais. Por um lado, podem escolher-se primeiro $n+1$ pessoas dentro de $2n$ pessoas e, depois, escolher um presidente dentro das $n+1$ pessoas escolhidas. Por outro lado, podem escolher-se primeiro n vogais dentro de $2n$ pessoas e, depois, escolher um presidente dentro das n pessoas restantes.

18. Temos que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k} \underset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \underset{(2)}{=} \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n},$$

(1) - Lei da Simetria, (2) - Convolução de Vandermonde.

19. (a) Temos

$$\begin{aligned}\binom{9}{5} &= \binom{8}{5} + \binom{8}{4} = \binom{7}{5} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{6}{5} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} \\ &= \binom{5}{5} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} = \sum_{k=4}^{8}\binom{k}{4}.\end{aligned}$$

Alternativa: Temos

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{r} = \sum_{l=r}^{r+n}\binom{l}{r} = \binom{r+n+1}{r+1} = \binom{r+n+1}{n}$$

onde usamos a lei da simetria na primeira igualdade, fazemos a mudança de variável $r+k=l$ na segunda igualdade, usamos a fórmula da adição do índice superior na terceira igualdade e voltamos a usar a lei da simetria na quarta igualdade.

(b) Seja $X = \{1, 2, \ldots, n+1\}$ um conjunto com $n+1$ elementos. O coeficiente $\binom{n+1}{m+1}$ dá o número de maneiras de obter $m+1$ elementos dentro de X. Outra maneira de contar este número de maneiras é a seguinte: quando retiramos $m+1$ elementos dentro de X, o maior elemento retirado é um número $k+1$ entre $m+1$ e $n+1$; quando retiramos esse maior elemento $k+1$, então há $\binom{k}{m}$ maneiras de retirarmos os restantes (porque $k+1$ é o maior que retiramos e ainda temos que retirar m de entre k). Ao todo, há $\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m}$ maneiras.

20. Justifique os passos intermédios:

$$\frac{(x+y)^{\underline{n}}}{n!} = \ldots = \binom{x+y}{n} \underset{\substack{\text{conv. de}\\ \text{Vandermonde}}}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!\,(n-k)!} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}$$

$$= \ldots = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}}{n!}.$$

21. Faremos indução em m. Comecemos por

$$\forall r \in \mathbb{N} \; \sum_{k=0}^{0} \binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right) = \frac{1}{2}\binom{r}{1} \qquad \text{(Base de Indução)}$$

Facilmente se verifica que a igualdade é verdadeira (ambos os membros são iguais a $\frac{r}{2}$). Passemos, pois, ao Passo de Indução. Admitindo

$$\forall r \in \mathbb{N} \; \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right) = \frac{m+1}{2}\binom{r}{m+1} \qquad \text{(Hipótese de Indução)}$$

provemos

$$\forall r \in \mathbb{N} \; \sum_{k=0}^{m+1} \binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right) = \frac{m+2}{2}\binom{r}{m+2} \qquad \text{(Tese de Indução)}$$

Tem-se

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m+1} \binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right) &= \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k}\left(\frac{r}{2}-k\right) + \binom{r}{m+1}\left(\frac{r}{2}-m-1\right) \\
&= \frac{m+1}{2}\binom{r}{m+1} + \binom{r}{m+1}\left(\frac{r}{2}-m-1\right) \qquad \text{(por hip. de ind.)} \\
&= \binom{r}{m+1}\left(\frac{m+1}{2}+\frac{r}{2}-m-1\right) \\
&= \frac{m+2}{2}\binom{r}{m+2}\frac{\binom{r}{m+1}(r-m-1)}{\binom{r}{m+2}(m+2)} = \frac{m+2}{2}\binom{r}{m+2}
\end{aligned}$$

22. Aplicando a lei da simetria, basta provar, pelo método de indução matemática, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; \binom{n}{i} < \binom{n}{j} \;\text{ se } i < j < \frac{n}{2}.$$

23. O argumento não funciona para o passo da indução que vai das colecções de um cavalo para as colecções de dois cavalos.

24. Temos

$$(4x+3y+2z+w)^{10} = \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4=0\\ i_1+i_2+i_3+i_4=10}}^{10} \binom{10}{i_1,i_2,i_3,i_4}(4x)^{i_1}(3y)^{i_2}(2z)^{i_3}w^{i_4}.$$

Para obtermos $xy^2w^3z^4$ terá de ser $i_1=1$, $i_2=2$, $i_3=4$, $i_4=3$. Logo o coeficiente pedido é:

$$\binom{10}{1,2,4,3} 4\cdot 3^2\cdot 2^4 = \frac{10!}{1!\,2!\,4!\,3!}\cdot 576.$$