

**U.C. 21089**  
**Processos Estocásticos Aplicados**

**6 de fevereiro de 2020**

**- INSTRUÇÕES -**

- O estudante deverá responder à prova na folha de ponto e preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega das folhas de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- O p-fólio é composto por 2 grupos de questões, contém 1 página e termina com a palavra **FIM**. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova.
- Utilize uma letra legível e não use uma caneta de outra cor que não seja o preto ou o azul - as respostas a lápis não serão consideradas.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- **O p-fólio tem a duração máxima de 1 hora e 30 minutos.**

**CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO:**

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- A distribuição da cotação total (12 valores) pelos 2 grupos de questões é a seguinte:

Grupo	1	2
Cotação	4	8

1. Após a emissão dum determinado programa televisivo, a estação de televisão que emite o programa recebe chamadas telefónicas de telespetadores de apoio, ou de desagravo. Suponha que as chamadas são recebidas de acordo com um processo de Poisson de intensidade  $\nu(t) = 24 - t$ ,  $0 \leq t \leq 24$  (medida em horas).
  - 1.1. Determine o número médio de chamadas recebidas durante o primeiro quarto de hora.
  - 1.2. Calcule a probabilidade de que não ocorra nenhuma chamada telefónica durante o primeiro minuto.
2. Considere um processo de nascimento e morte a taxas de natalidade e de morte constantes, respetivamente,  $\lambda$  e  $\mu \neq 0$ . Pretende-se averiguar para que valores de  $\lambda$  e  $\mu$  existe distribuição limite.
  - 2.1. Sabido que numa situação de equilíbrio a distribuição limite  $\{p_j : j = 0, 1, 2, \dots\}$  do processo é solução do sistema de equações

$$\begin{cases} \lambda p_{j-1} - (\mu + \lambda)p_j + \mu p_{j+1} = 0, & j \geq 1 \\ -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

mostre que

$$p_j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j p_0, \quad j \in \mathbb{N}$$

é uma solução do sistema de equações (1).

- 2.2. Determine o valor de  $p_0$ .
- 2.3. Prove que para  $\lambda < \mu$  existe uma, e uma só, distribuição estacionária.
- 2.4. Numa situação de estacionaridade, determine a probabilidade da cadeia de Markov estar no estado 1 ao fim de um longo período de tempo.

**FIM**