UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21002
Álgebra Linear I

29 de Fevereiro de 2016

- INSTRUÇÕES -

- O tempo de duração da prova de exame é de 2 horas, acrescida de 30 minutos de tolerância.
- O estudante deve preencher o cabeçalho e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível. As questões do grupo I (escolha múltipla) devem ser respondidas no enunciado. As questões dos demais grupos devem ser respondidas no caderno de prova.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- A prova é constituída por 2 páginas e termina com a palavra FIM. Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeitos de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o aluno deve explicitar todos os passos necessários. Respostas sem justificação não serão cotadas.
- Não é permitido usar máquina de calcular nem quaisquer elementos de consulta.

Critérios de Avaliação

Grupo I (escolha múltipla): Cada questão do grupo I vale 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados 1/3 valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta assinalada. A classificação mínima do grupo I é de 0 valores. As restantes questões têm as seguintes cotações:

II	**III**	**IV**	**V**
4 val.	4 val.	4 val	4 val

Por favor preencha os seus dados

Nome:

Nº de Estudante

B.I.:

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo. Caso pretenda anular uma resposta escreva "Anulado"junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

I. Questões de escolha múltipla.

1. Sejam A e B matrizes semelhantes pertencentes a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então:

☐ a) $A^2 = B^2$
☐ b) $\det(A^2) = \det(B^2)$
☐ c) $A - B = I_n$
☐ d) $\det A = -\det B$

2. Sejam A e B matrizes pertencentes a $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então:

☐ a) $\det(A)\det(B) = -\det(-A)\det(-B)$
☐ b) $\det(-A)\det(B) = \det(A)\det(-B)$
☐ c) $\det(A^3 - B^3) = I_3$
☐ d) Nenhuma das afirmações anteriores é verdadeira.

3. Considere em $\mathbb{R}_3[x]$ a base $(1, x, x^2, x^3)$ e a aplicação linear de $\mathbb{R}_3[x]$ em $\mathbb{R}_3[x]$ definida por $g(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_3 - a_2 + a_1 - a_0$. Nessa base temos:

☐ a) Nuc $g = \emptyset$ e Im $g = \mathbb{R}_3[x]$.
☐ b) Nuc $g = \{0\}$ e Im $g = \mathbb{R}[x]$.
☐ c) dim(Nuc g)= 1 e dim(Im g)= 1.
☐ d) dim(Nuc g)= 3 e dim(Im g)= 1.

4. Considere em $\mathbb{R}^3$ a sequência

$$H = \{(1, 2, 1), (1, 0, 2), (1, \pi, 0), (0, 0, 0)\}$$

Então:

☐ a) H é uma base de $\mathbb{R}^3$.
☐ b) H é uma sequência geradora linearmente independente.
☐ c) $\langle (1, 2, 1), (1, 0, 2), (1, \pi, 0), (0, 0, 0)\rangle = \mathbb{R}^3$
☐ d) $\dim(\langle (1, 2, 1), (1, 0, 2), (1, \pi, 0), (0, 0, 0)\rangle) = 4$

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Se $\alpha \neq 0$ é um valor próprio de uma matriz invertível A, então α^{-1} é valor próprio de A^{-1}.
b) Se A^2 é a matriz nula então A é a matriz nula.
c) Se A^2 é a matriz nula então o único valor próprio de A é 0.

III. i) Aplicando o método de eliminação de Gauss determine se a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

é invertível, e em caso afirmativo calcule R^{-1} usando o método de eliminação de Gauss-Jordan aplicado à matriz $[R|I_4]$.

ii) Utilizando a alínea anterior resolva a equação $RX = B$ onde $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

IV. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Calcule os valores próprios de A.
b) Será a matriz diagonalizável? Justifique a sua resposta.
c) Determine os vectores próprios associados aos valores próprios que determinou na alínea a).
d) Determine se é possível escrever A na forma $A = PDP^{-1}$ onde P é uma matriz invertível e D é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine P e D nessas condições.

V. Considere a aplicação linear $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ tal que

$$h(a, b, c) = (a + b)x^2 + c,$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Determine $\mathcal{M}(h; B, B')$, com

$$B = ((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)) \text{ e } B' = \left(x^2 + 1, 2x, -x + 1\right)$$

FIM