

U.C. 21002
Álgebra Linear I

15 de julho de 2014

- O p-fólio é composto por 4 grupos de questões e respetivas alíneas, contém 2 páginas e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III** e **IV** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de quaisquer elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o p-fólio tem a duração máxima de **1 hora e 30 minutos**.

CRITÉRIOS DE AVALIAÇÃO E COTAÇÃO

- Com exceção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que corretos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II	III	IV
4 val.	3.5 val.	1.5 val.

Nome:

Nº de Estudante: B. I./C.C. nº

Turma Assinatura do Vigilante:

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando \times no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva “Anulado” junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretende que seja considerada.

Questão 1

Considere as matrizes invertíveis B, C, D e $F \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e seja $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $CA = DEF$. Considere as afirmações seguintes:

1. A é invertível.
2. Se $F = I_2$ então a matriz inversa de A é $A^{-1} = (C^{-1}DE)^{-1}$
3. A matriz inversa de A é $A^{-1} = (CDEF)^{-1}$.

Então:

- a) Nenhuma das afirmações é verdadeira.
- b) Apenas uma das afirmações é verdadeira.
- c) Apenas duas das afirmações são verdadeiras.
- d) Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2

Seja B uma matriz quadrada e $p_B(\lambda) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda)$ o seu polinómio característico. Então:

- a) $\det B = 3$.
- b) O núcleo de B tem dimensão 2.
- c) B é invertível..
- d) $B \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

Questão 3

Considere matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, e suponha que $\det(2AB) = 24$. Então:

- a) $\det A \cdot \det B = 3$.
- b) $\det(A)^{-1} \cdot \det B = 3$.
- c) $\det A = 1$ e $\det B = 8$.
- d) $\det A = 2$ e $\det B = 3$.

Nome:
Nº de Estudante: B. I./C.C. nº
Turma Assinatura do Vigilante:

RESPONDA AOS GRUPOS SEGUINTE NO CADERNO DE PROVA

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$.

- Determine os valores próprios de A .
- Determine uma base para o subespaço próprio associado ao valor próprio 4.
- Será a matriz A diagonalizável? Justifique a sua resposta.
- Determine os espaços próprios associados aos restantes valores próprios de A .
- Determine se é possível escrever $D = S^{-1}AS$, onde $S \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível e $D \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ é uma matriz diagonal. Em caso afirmativo determine matrizes S e D nessas condições.

III. Considere a função $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a, b, c) = \begin{bmatrix} a & a - b \\ a - c & c \end{bmatrix}.$$

- Calcule a representação matricial de T em relação às bases canónicas de \mathbb{R}^3 e de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- Determine o núcleo de T .
- Determine a dimensão da imagem de T .
- Indique se existem vetores $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $T(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

IV. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = -A$. O que pode afirmar sobre o determinante de A ?

FIM