Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 4 a 11 de Abril de 2022

Data de Limite de Entrega

11 de Abril de 2022, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Programação linear

Competências

Deve demonstrar ter capacidade para aplicar os Métodos Gráfico e Simplex na resolução de problemas de Programação Linear.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores distribuídos de acordo com o enunciado.
2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **nove** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Patrícia Engrácia e Elsa Negas

Enunciado

1. (1.0 val.)

A Metex produz dois produtos: *t*rad e *b*io; os quais são vendidos em embalagens de um quilograma e dão um lucro semanal de 60u.m. e 45u.m. (u.m.= unidades monetárias), respetivamente.

O produto *t*rad consiste na imagem de marca da empresa e têm de ser produzidas pelo menos 300 quilogramas semanalmente. O produto *b*io é novo no mercado e a empresa não consegue vender mais do que 200 quilogramas semanalmente, mas tem de produzir pelo menos 100 quilogramas para se implementar no mercado. Ambos os produtos são produzidos com base em duas matérias-primas:

- Cada unidade produzida do produto *t*rad consome 1 unidade da matéria-prima 1 e 2 unidades da matéria-prima 2;
- Cada unidade do produto *b*io consome 2 unidades da matéria-prima 1 e 3 unidades da matéria-prima 2.

As disponibilidades mensais de cada matéria-prima são, respetivamente, 3000 e 4000 unidades.

Formalize o problema de programação linear que maximize o lucro semanal.

Resolução:
Variáveis de decisão:
X: quantidade de produto *t*rad produzido semanalmente (em Kg);
Y: quantidade de produto *b*io produzido semanalmente (em Kg).

Função objetivo, a maximizar (lucro):

$$F(X,Y) = 60X + 45Y$$

Restrições:
$X \geq 300$ "têm de ser produzidas pelo menos 300 quilogramas semanalmente"
$100 \leq Y \leq 200$ "não consegue vender mais do que 200 quilogramas semanalmente, mas tem de produzir pelo menos 100 quilogramas para se implementar no mercado"
$X + 2Y \leq \frac{3000}{4}$ quantidade consumida da matéria prima 1, sabendo que mensalmente tem uma disponibilidade de 3000 unidades ($3000/4$ semanalmente)

$2X + 3Y \leq 1000$ quantidade consumida da matéria prima 2, sabendo que mensalmente tem uma disponibilidade de 4000 unidades ($4000/4$ semanalmente)
$X, Y \geq 0$ condições de não negatividade.

Assim, o problema formaliza-se como:

$$\max F = 60X + 45Y$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} X \geq 300 \\ Y \geq 100 \\ Y \leq 200 \\ X + 2Y \leq 750 \\ 2X + 3Y \leq 1000 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2. (1.0 val.)

Considere o seguinte problema de programação linear:

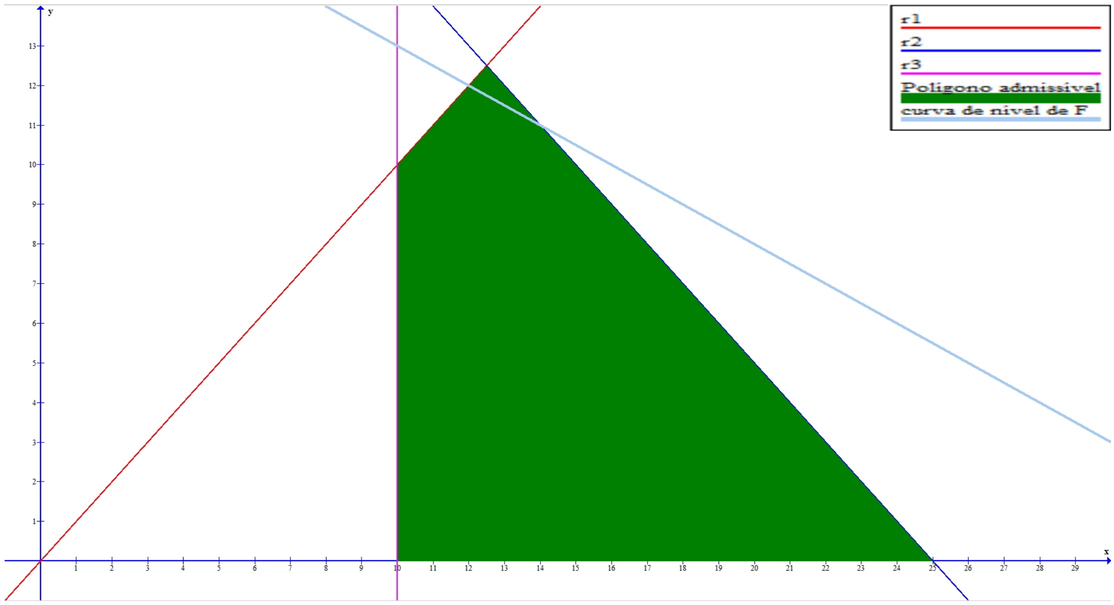
$$\max F = 5X + 10Y$$

sujeito a

$$\begin{cases} X \geq Y \\ Y \leq 25 - X \\ X \geq 10 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

Desenhe o polígono admissível, resolva o problema pelo método gráfico e interprete a solução ótima (variáveis de decisão, variáveis de folga e o valor da função objetivo).

Resolução:
A reta $X = Y$ passa nos pontos $(0, 0)$ e $(1, 1)$.
A reta $Y = 25 - X$ passa nos pontos $(0, 25)$ e $(25, 0)$.
A reta $X = 10$ é a reta vertical que passa no ponto $(10, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $5X + 10Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -\frac{X}{2} + \frac{z}{10}.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Na figura acima, pode ver-se uma curva de nível (reta azul claro). Assim, o ponto ótimo é o ponto que está na intersecção das retas r_1 e r_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = Y \\ Y = 25 - X \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ Y = 25 - Y \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{25}{2} \\ Y = \frac{25}{2} \end{array} \right.$$

$$(X^*, Y^*) = \left(\frac{25}{2}, \frac{25}{2}\right)$$

com $F^* = F(X^*, Y^*) = \frac{375}{2}$.

3. Considere o seguinte quadro inicial do método do simplex .

	X_1	X_2	F_1	F_2	α	TI
F_1	1	0	1	0	0	5
	1	-1	0	-1	1	2
$-F$	1	-1	0	0	M	0

a) (0.5 val.) Escreva o problema na forma standard e na forma geral.
Resolução:

Forma standard:

$$\max -F = -X_1 + X_2$$

sujeito a

$$\begin{cases} X_1 + F_1 = 5 \\ X_1 - X_2 - F_2 = 2 \\ X_1, X_2, F_1, F_2 \geq 0 \end{cases}$$

Forma geral:

$$\min F = X_1 - X_2$$

sujeito a

$$\begin{cases} X_1 \leq 5 \\ X_1 - X_2 \geq 2 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

b) (1.0 val.) Resolva o problema.
Resolução:

base	X_1	X_2	F_1	F_2	α	TI	Δ
F_1	1	0	1	0	0	5	
	1	-1	0	-1	1	2	
$-F$	1	-1	0	0	M	0	$(l_3 - Ml_2)$
F_1	1	0	1	0	0	5	5
α	1	-1	0	-1	1	2	2 $\leftarrow$
$-F$	1-M $\uparrow$	-1+M	0	M	0	$-2M$	
F_1	0	1	1	1	-1	3	3 $(l_1 - l_2)$
X_1	1	-1	0	-1	1	2	2
$-F$	0	0	0	1	0	$-1 + M$	-2 $(l_3 - (1 - M)l_2)$

Neste ponto, o algoritmo podia parar, tendo como solução ótima $(X_1^*, X_2^*) = (2, 0)$ com $F^* = 2$. No entanto, note-se que X_2 é variável não básica e mesmo assim tem coeficiente 0, logo conclui-se que a solução não é única. Mais: podemos iterar mais uma vez o processo e obter outra solução óptima:

base	X_1	X_2	F_1	F_2	α	TI	Δ
F_1	0	1	1	1	-1	3	3 $\leftarrow$
X_1	1	-1	0	-1	1	2	2
$-F$	0	0	0	1	0	$-1+M$	-2
		$\uparrow$					
X_2	0	1	1	1	-1	3	
X_1	1	0	1	0	0	5	$(l_2 + l_1)$
$-F$	0	0	0	1	$-1+M$	-2	

Assim, obtemos outra solção óptima: $(X_1^*, X_2^*) = (5, 3)$ com $F^* = 2$. Mais uma vez, o método poderia continuar visto que a variável não básica F_1 tem coeficiente 0 em $-F$.

Logo, concluímos que este problema tem solução múltipla dada por

$$(X_1^*, X_2^*) = (1 - \lambda)(2, 0) + \lambda(5, 3), \qquad \lambda \in [0, 1]$$

com $F^* = 2$.

c) (0.5 val.) Interprete a solução ótima (variáveis de decisão, variáveis de folga e o valor da função objetivo) e indique se se trata de uma solução única ou uma solução múltipla.

Resolução:

Como vimos na alínea anterior, trata-se de um problema com soluções múltiplas. Todos os pontos no segmento de reta definido pelos pontos $(2, 0)$ e $(5, 3)$ minimizam a função objetivo sujeita às restrições. A variável de folga F_2 nunca é básica, o que quer dizer que as soluções satisfazem a restrição $X_1 - X_2 = 2$ (corresponde a um recurso que se esgota). Por outro lado, como a variável F_1 ora está na base, ora não está, pelo que concluímos que a restrição $X_1 = 5$ é obervada no ponto em que $F_1 = 0$ e nos restantes temos $X_1 < 5$ (desigualdade restrita), ou seja corresponde a um recurso que não se esgota.

FIM