1.

1.1

Sabendo que $a_2 = \frac{1}{3}$ e $a_4 = \frac{1}{108}$ e sabendo que $a_3 > 0$ podemos calcular:

$$a_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{108}} = \pm\sqrt{\frac{1}{324}} \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{18}$$

A razão será dada então por:

$$r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} \Leftrightarrow r = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{108}}{\frac{1}{18}} \Leftrightarrow r = \frac{3}{18} = \frac{18}{108} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

1.2

Para calcular o termo geral temos:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Calculando a_1 temos:

$$a_1 = \frac{a_2}{r} \Leftrightarrow a_1 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = \frac{6}{3} = 2$$

Substituindo na formula temos:

$$\boldsymbol{a_n = 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}}$$

1.3

Temos:

$$\lim_{n\to+\infty} 2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = 2\cdot 0 = \mathbf{0}$$

2.

2.1

Temos então:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{x+2}-e^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^2(e^x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{e^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{-1} = 0\cdot 1 = \\ = \mathbf{0}$$

2.2

Temos então:

$$\lim_{x\to 0}\frac{5}{x}\log\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\log\left(\frac{1}{x+1}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{5}{x}\cdot\log\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x+1}\right)\right] = +\infty\cdot 0 = \mathbf{0}$$

3.

3.1

No intervalo $]-\infty, 3[$ a função é contínua porque uma função polinomial.

No intervalo $]3, +\infty[$ a função é contínua porque uma função racional.

Para $x = 3$ temos:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x - 2 = 1$$

$$f(3) = \frac{3}{3} = 1$$

Logo, sendo o $\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 1$ podemos dizer que a função também é contínua em $x = 3$

Como tal, podemos dizer que a função **é contínua** em todo o $\mathbb{R}$.

3.2

Pegando na função $f(x) = \begin{cases} x - 2, & x < 3 \\ \frac{3}{x}, & x \geq 3 \end{cases}$ e no intervalo $[0,3]$, substituindo x por 0, temos: $f(0) = 0 - 2 = -2$, substituindo x por 3, temos: $f(3) = \frac{3}{3} = 1$, o que nos dá o intervalo $[-2,1]$ onde 0 está contido.

Visto que $f(3) = 1$, para calcularmos o zero da função usamos o ramo $x - 2$

então temos: $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, logo: $f(2) = 0$

4.

Calculando $g'\left(\frac{1}{\pi}\right)$ temos:

Podemos decompor a função $g(x)$ em:

$$f(x) = e^{-3x}$$

$$h(x) = cos^2\left(\frac{4}{x}\right)$$

Calculando $f'(x)$ e $h'(x)$ temos:

$$f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3)$$

$$h'(x) = \left(-sen\left(\frac{4}{x}\right)\right)\left(-sen\left(\frac{4}{x}\right)\right) = sen^2\left(\frac{4}{x}\right)$$

Fazendo $g'(x) = \ (f \cdot h)' \ temos$:

$$g'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) \cdot cos^2\left(\frac{4}{x}\right) + e^{-3x} \cdot sen^2\left(\frac{4}{x}\right) = e^{-3x}\left(cos^2\left(\frac{4}{x}\right) + sen^2\left(\frac{4}{x}\right)\right) \cdot (-3) =$$
$$= e^{-3x} \cdot (-3)$$

Logo:

$$\boldsymbol{g'\left(\frac{1}{\pi}\right) = e^{-\frac{3}{\pi}} \cdot (-3)}$$

5.

Temos os seguintes acontecimentos:

A - A primeira carta extraída é um Ás, com a probabilidade $P(A) = \frac{4}{52}$

B - A segunda carta extraída é um Ás, com a probabilidade $P(B) = \frac{3}{51}$

C - A terceira carta extraída é um Ás, com a probabilidade $P(C) = \frac{2}{50}$

D - A quarta carta extraída é um Ás, com a probabilidade $P(D) = \frac{1}{49}$

A probabilidade de saírem os quatro Ases é dada pela expressão:

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{1}{49} = \frac{24}{6497400} = \boldsymbol{\frac{1}{270725}}$$

FIM