Proposições

- Uma **proposição** é toda a expressão p suscetível de ser verdadeira ou falsa.
- Uma proposição **verdadeira** tem o valor lógico de V ou 1 (verdade).
- Uma proposição **falsa** tem o valor lógico de F ou 0 (falsidade).

Operações com proposições

Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Equivalência

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disjunção exclusiva

p	q	$p \dot{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Propriedades das operações lógicas

Princípio da não contradição

$p \wedge \sim p \Leftrightarrow \mathrm{F}$

Princípio do terceiro excluído

$p \vee \sim p \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Comutatividade

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associatividade

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Elemento neutro

$p \wedge \mathrm{V} \Leftrightarrow p$ $p \vee \mathrm{F} \Leftrightarrow p$

Elemento absorvente

$p \wedge \mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{F}$ $p \vee \mathrm{V} \Leftrightarrow \mathrm{V}$

Distributividade

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leis de De Morgan

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Implicação e disjunção

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Negação da implicação

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Implicação contrarrecíproca

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Transitividade da implicação

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Dupla implicação

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

Dupla negação

$\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

Operação lógica e expressões

Operação	Expressão
Negação $(\sim)$	não não é verdade que …
Conjunção $(\wedge)$	… e …
Disjunção $(\vee)$	… ou …

Operação	Expressão
Implicação $(\Rightarrow)$	se … então …
Equivalência $(\Leftrightarrow)$	… se e somente se … … se e só se …

Expressão proposicional ou condição

Uma **expressão proposicional** ou **condição** é uma expressão $p(x)$ envolvendo a variável *x*, tal que, substituindo a variável por um objeto *a*, obtém-se uma proposição $p(a)$.

Quantificadores

Quantificador universal: $\forall$

Se $p(x)$ é uma condição universal em *U*, a expressão $\forall x \in U, p(x)$ é uma proposição verdadeira.

Quantificador existencial: $\exists$

Se $p(x)$ é uma condição possível em *U*, a expressão $\exists x \in U, p(x)$ é uma proposição verdadeira.

Condições

- Condições
  - Impossíveis
  - Possíveis
    - Não universais
    - Universais

Representação

$$\forall x \in U, p(x) \Leftrightarrow \forall x, (x \in U \Rightarrow p(x))$$

$$\exists x \in U : p(x) \Leftrightarrow \exists x : x \in U \wedge p(x)$$

Propriedades

Se $p(x)$ é uma condição qualquer, $u(x)$ é uma condição universal e $i(x)$ é uma condição impossível, verifica-se:

$$p(x) \vee u(x) \Leftrightarrow u(x) \qquad p(x) \wedge u(x) \Leftrightarrow p(x)$$

$$p(x) \vee i(x) \Leftrightarrow p(x) \qquad p(x) \wedge i(x) \Leftrightarrow i(x)$$

Negação de uma condição

- A negação de uma condição impossível é uma condição universal.
- A negação de uma condição universal é uma condição impossível.
- $\sim [\forall x \in U, p(x)] \Leftrightarrow \exists x \in U : \ \sim p(x)$
- $\sim [\exists x \in U : p(x)] \Leftrightarrow \forall x \in U, \ \sim p(x)$

Segundas leis de De Morgan

$$\sim [\forall x, p(x)] \Leftrightarrow \exists x : \ \sim p(x)$$

$$\sim [\exists x : p(x)] \Leftrightarrow \forall x, \ \sim p(x)$$

Negação de uma implicação

$$\sim (\forall x, p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \exists x : p(x) \wedge \sim q(x)$$

Dupla implicação

$$\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x)) \Leftrightarrow \forall x, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$$

Contrarrecíproco

$$\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \Leftrightarrow \forall x, (\sim q(x) \Rightarrow \sim p(x))$$

Contraexemplo

Para provar que $\forall x \in U, p(x)$ é uma proposição falsa, basta apresentar um contraexemplo, isto é, $a \in U$, tal que $p(a)$ é falsa.

Conjuntos e condições

Condições definidas em *U*		Relações entre conjuntos-solução em *U*	
$a(x)$		A	
$b(x)$		B	
$\sim a(x)$	negação	$\overline{A}$	complementar
$a(x) \wedge b(x)$	conjunção	$A \cap B$	interseção
$a(x) \vee b(x)$	disjunção	$A \cup B$	reunião (ou união)
$a(x) \Rightarrow b(x)$	implicação	$A \subset B$	inclusão
$a(x) \Leftrightarrow b(x)$	equivalência	$A = B$	igualdade

- $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \setminus B = \{x, x \in A \wedge x \notin B\}$
- $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \Rightarrow x \in B)$
- $A \subset B \wedge B \subset A \Leftrightarrow A = B$
- Se $B \subset A$, então $A \setminus B = \overline{B}$ é o complementar de *B* em *A*