ÁLGEBRA LINEAR I | 21002

Período de Realização

Decorre de 27 de novembro a 7 de dezembro de 2020

Hora Limite de Entrega

7 de dezembro de 2020, até às 23h55 de Portugal Continental

Conteúdos

Matrizes. Sistemas de Equações Lineares. Determinantes. Espaços Vetoriais.

Competências

Identificar as principais técnicas, metodologias e ferramentas da Álgebra Linear; Aplicar técnicas de Álgebra Linear para modelar e resolver problemas, nomeadamente saber utilizar matrizes e determinantes.

Recursos

Manual da UC.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

- Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.

- Justifique *cuidadosamente* todas as suas respostas, e apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio. Não será atribuída qualquer cotação a uma resposta não justificada.

A cotação total deste e-fólio é de 4 valores.

Cada questão do Grupo I (escolha múltipla) tem a cotação de 0.25 valores. Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira; deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.
É considerada errada uma questão com mais do que uma resposta.

Os Grupos II e III têm cotação de 1 valor cada.

Os Grupos IV e V têm cotação de 0,5 valores cada.

Normas a respeitar

O documento final deverá estar em formato pdf.

Todas as páginas do documento em *pdf* devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar 14 páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro em formato *pdf* para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega.
Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro em formato *pdf* a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Rafael Sasportes

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respectivo.

- Deve justificar a afirmação que escolheu como sendo a verdadeira.
- Deve também justificar porque é que as outras afirmações estão erradas.

1. Considere as matrizes A, B e C definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Então:

☐ **a)** $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

☐ **b)** $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

☐ **c)** $C^2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

☐ **d)** $CB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 10 & 2 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}$

2. Considere os seguintes subconjuntos:

$$A = \left\{(x, y, z) \in \cancel{\mathbb{R}_3}\, \mathbb{R}^3 : x + y = z\right\},$$
$$B = \left\{p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = p(4)\right\},$$
$$C = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : AX = XA, \forall X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})\},$$
$$D = \left\{(x, y, z, w) \in \cancel{\mathbb{R}_4}\, \mathbb{R}^4 : x = y + w \ \text{ e } \ z = 2x + w\right\}.$$

Então:

☐ **a)** A, B, C e D são subespaços vetoriais.

☐ **b)** Só A, B e C são subespaços vetoriais.

☐ **c)** Só A e B são subespaços vetoriais.

☐ **d)** Só A é subespaço vetorial.

3. Sejam A, B e C matrizes de ordem 3 tais que $\det A = -1$, $\det B = 2$ e $\det C = -4$.

Então $\det\left(-2A^{-1}B^2C^{-1}\right)$ é igual a:

☐ **a)** 2

☐ **b)** -2

☐ **c)** 8

☐ **d)** -8

4. Considere a matriz aumentada $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & \alpha & 9 & 3 \end{array}\right]$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Então:

☐ **a)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema associado tem solução única.

☐ **b)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema associado é impossível.

☐ **c)** Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o sistema associado é indeterminado.

☐ **d)** Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual o sistema associado é indeterminado.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

i) Verifique que A é invertível e calcule a sua inversa usando transformações elementares sobre linhas, abreviadamente $\left[\, A \mid I_3 \,\right] \longrightarrow \left[\, I_3 \mid A^{-1} \,\right]$.

ii) Calcule a adjunta de A; usando o facto de

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}A,$$

obtenha a inversa de A.

III. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z \cancel{- w} - 3w = a \\ 2x - 5y - 3z + 12w = b \\ 7x + y + 8z + 5w = c \end{cases}$$

i) Mostre justificadamente que o sistema admite solução se e sómente se $37a + 13b = 9c$.

ii) Determine a solução geral do sistema quando $a = 2$ e $b = 4$.

IV. Seja $A \in \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ uma matriz não invertível.

Mostre justificadamente que $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

traço da matriz = soma da diagonal principal

V. Calcule o determinante da matriz

$$D_{n,m} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_m \\ I_n & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

respectivamente

onde I_n (resp. I_m) é a matriz identidade de ordem n (resp. m), e os $\mathbf{0}$ representam matrizes nulas de dimensões adequadas.

FIM