2. Teorema de Pitágoras

Pitágoras de Samos foi um importante matemático e filśofo grego. Nasceu no ano de 570 a.C na ilha de Samos, na região da Ásia Menor (Magna Grécia) e residiu a maior parte da sua vida na colonia grega de Crotona, no sul de Itália. Recebeu muita influência científica e filosófica dos filósofos gregos Tales de Mileto, Anaximandro e Anaxímenes. Enquanto visitava o Egipto, impressionado com as pirâmides, desenvolveu o famoso Teorema de Pitágoras.

O **Teorema de Pitágoras** diz que num triângulo rectângulo, com hipotenusa a e catetos b e c, temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Aplicação 4. Diga quanto mede a hipotenusa (h) de um triângulo rectângulo cujos catetos medem 3 e 4.

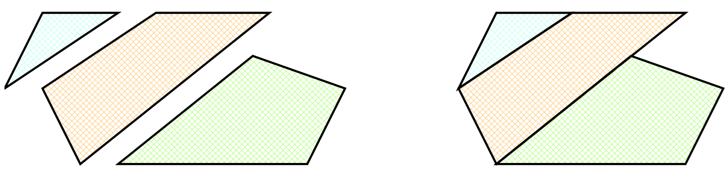
Resolução. $h^2 = 3^2 + 4^2$, ou seja, $h^2 = 9 + 16$, donde $h^2 = 25$, e assim $h = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Como os comprimentos não podem ser negativos, a resposta é $h = 5$.

O Teorema de Pitágoras suscitou o interesse de muitos estudiosos e matemáticos e, através dos séculos, várias provas foram desenvolvidas. O livro *The Pythagorean Proposition*, de Elisha Scott Loomis, por exemplo, contém 370 demonstrações diferentes. Neste texto apresentamos 4 provas diferentes, cujas leituras são facultativas.

Prova 1: Esta prova recorre ao cálculo de áreas. Desta forma, comecemos por relembrar o conceito de área de um polígono.

Toda a linha poligonal plana fechada, que não se intersecta, limita um domínio plano chamado *superfície plana*. Denomina-se *área* a medida de uma superfície plana. A unidade que se usa para medir áreas é a área do quadrado em que o comprimento do lado é igual à unidade. Por exemplo pode tomar-se para unidade de área a área de um quadrado com um metro de lado (metro quadrado) ou um centímetro de lado (centímetro quadrado), ou outra.

A área é aditiva. Quer dizer que se unirmos duas ou mais figuras planas de forma a que não se sobreponha nenhuma parte duma delas às outras, a área da superfície obtida é igual à soma das áreas de todas elas.

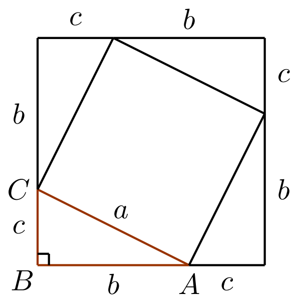


Recordemos as áreas das superfícies limitadas pelos polígonos mais comuns:

	Área	medidas
quadrado	$A = l^2$	l lado
rectângulo	$A = b \times h$	b base, h altura
triângulo	$A = \frac{b \times h}{2}$	b base, h altura
losango	$A = \frac{d_1 \times d_2}{2}$	d_1, d_2 diagonais
trapézio	$A = \frac{b_1+b_2}{2} \times h$	b_1, b_2 bases, h altura

Retomemos a prova 1 do Teorema de Pitágoras:

Consideremos o triângulo $\triangle ABC$, rectângulo em $\angle B$, e consideremos o quadrado seguinte:



Vamos calcular a área do quadrado maior acima de duas formas diferentes. Em primeiro lugar, o lado do quadrado mede $b+c$ pelo que a área é $(b+c)^2$.

Por outro lado, como a área é a soma das áreas das figuras contidas no quadrado grande, temos a área do menor quadrado (dada por a^2) e temos quatro triângulos cuja área é $\frac{b \times c}{2}$. Portanto, a área do quadrado grande é também dada por

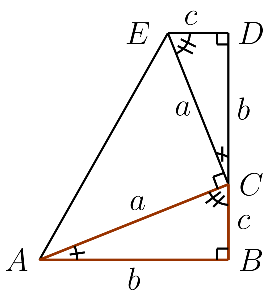
$$a^2 + 4\frac{b \times c}{2}.$$

Agora igualamos e resolvemos:

$$(b+c)^2 = a^2 + 4\frac{b \times c}{2} \implies b^2 + 2bc + c^2 = a^2 + 2bc \implies b^2 + c^2 = a^2.$$

Prova 2: Esta prova pertence a James Abram Garfield (foi presidente dos E.U.A apenas durante 4 meses e assassinado em 1881). A prova foi publicada em 1882, no Mathematical Magazine e recorre, também, ao cálculo de áreas.

Dado o triângulo $\triangle ABC$, rectângulo em $\angle B$, podemos considerar outro triângulo igual $\triangle CDE$ e dispô-los como na figura abaixo, formando o trapézio $[ABDE]$, com lados paralelos $[AB]$ e $[DE]$:



Desta forma o trapézio é formado por três triângulos rectângulos $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ e $\triangle ACE$ e temos

$$AB = b = DC \ , \ BC = c = DE \ , \ AC = a = CE.$$

Sabemos que a área do trapézio $[ABDE]$ é dada por

$$A_{[ABDE]} = \frac{b+c}{2} \cdot h = \frac{b+c}{2} \cdot (b+c) = \frac{(b+c)^2}{2} = \frac{b^2+2bc+c^2}{2} \qquad (*)$$

porque a altura do trapézio é $h = b + c$. Mas como a área é aditiva, então a área do trapézio é igual à soma da área dos três triângulos

$$A_{[ABDE]} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle CDE} + A_{\triangle ACE}.$$

Como os três triângulos são rectângulos, temos

$$A_{[ABDE]} = \frac{b \cdot c}{2} + \frac{b \cdot c}{2} + \frac{a \cdot a}{2} = \frac{2bc + a^2}{2}. \qquad (**)$$

Das igualdades (*) e (**) podemos concluir que

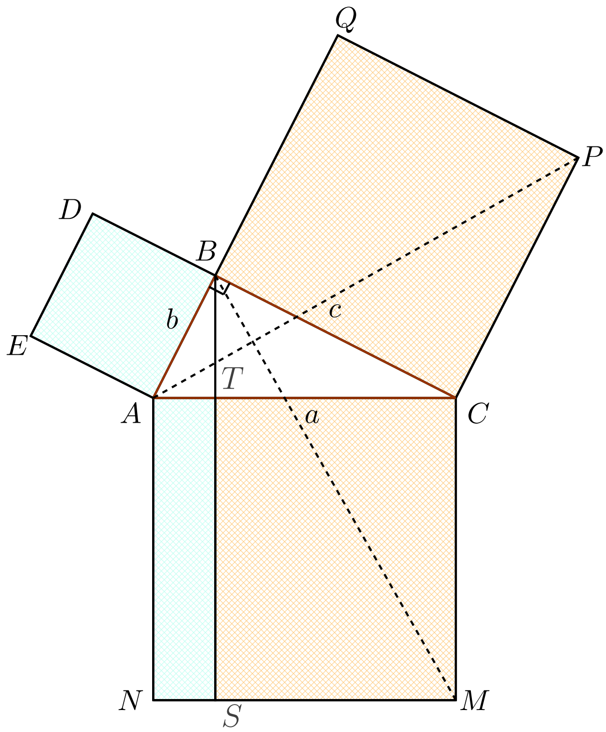
$$\frac{b^2+2bc+c^2}{2} = A_{[ABDE]} = \frac{2bc+a^2}{2}.$$

Simplificando obtemos

$$b^2 + c^2 = a^2,$$

o que prova o Teorema de Pitágoras.

Prova 3: Esta prova é a apresentada por Euclides, no Livro I dos Elementos, proposição 47.



Euclides prova que a área do quadrado $\square NMCA$ é igual à soma das áreas dos quadrados $\square BCPQ$ e $\square ABDE$. Para isso, traça a perpendicular ao lado $[AC]$ e que passa pelo vértice B. Esta recta corta o lado $[AC]$ num ponto T e o lado $[NM]$ num ponto S. Assim o quadrado $\square NMCA$ fica dividido em dois rectângulos $[NSTA]$ e $[MSTC]$. Por outro lado, considera os segmentos $[AP]$ e $[BM]$ (como na figura), obtendo os triângulos $\triangle MCB$ e $\triangle ACP$. Temos

$$MC = a = AC \ , \ \angle C \text{ é comum (a } \triangle MCB \text{ e } \triangle ACP) \ , \ CB = c = CP$$

e, portanto, pelo caso LAL da congruênvia de triângulos concluímos que

$$\triangle MCB \equiv \triangle ACP.$$

Para calcular as áreas deste triângulos temos de observar que a altura do $\triangle MCB$ em relação ao vértice A é $h_A = MS$ e que a altura do $\triangle MCB$ em relação ao vértice C é $h_C = PQ$ (por paralelismo de lados). Assim,

$$A_{\triangle MCB} = \frac{MC \times h_A}{2} = \frac{MC \times MS}{2} = \frac{1}{2} A_{[MSTC]}$$
$$A_{\triangle ACP} = \frac{PC \times h_C}{2} = \frac{PC \times PQ}{2} = \frac{1}{2} A_{\square BCPQ} = \frac{c^2}{2}$$

Por outro lado, como $\triangle MCB \equiv \triangle ACP$, então podemos sobrepôr os dois triânguloso, e isto justifica que os triângulos têm igual área, isto é

$$A_{\triangle MCB} = A_{\triangle ACP}.$$

Portanto das igualdades acima podemos concluir que o rectângulo $[MSTC]$ tem a mesma área que o quadrado $\square BCPQ$, isto é

$$A_{[MSTC]} = A_{\square BCPQ} = c^2.$$

Com um raciocínio idêntico Euclides provou que

$$A_{[NSTA]} = A_{\square ABDE} = b^2.$$

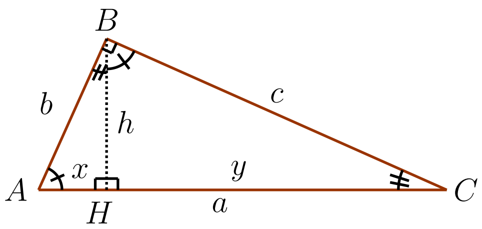
Como $\square NMCA$ foi divido nos dois rectângulos $[MSTC]$ e $[NSTA]$ e a área é aditiva, temos

$$a^2 = A_{\square NMCA} = A_{[MSTC]} + A_{[NSTA]} = c^2 + b^2.$$

E a demonstração está completa.

Prova 4: Nos cursos tradicionais de geometria plana, a prova utilizada é a prova por semelhança de triângulos.

Consideremos o triângulo $\triangle ABC$ rectângulo em $\angle B$. A altura $[BH]$ (perpendicular ao lado $[AC]$ no ponto H) relativa à hipotenusa, divide o $\triangle ABC$ em dois triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle BHC$.



Temos

$$\angle A \text{ (no } \triangle ABC) = \angle A \text{ (no } \triangle AHB) \text{ , } \angle B = 1 \text{ recto} = \angle H.$$

Portanto, pelo caso AA, temos $\triangle ABC \sim \triangle AHB$. Por outro lado,

$$\angle C \text{ (no } \triangle ABC) = \angle C \text{ (no } \triangle BHC) \text{ , } \angle B = 1 \text{ recto} = \angle H.$$

Portanto, pelo caso AA, temos $\triangle ABC \sim \triangle BHC$. Das semelhanças de triângulos concluímos que:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{HB} = \frac{AC}{AB} \iff \frac{b}{x} = \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \implies \boxed{b^2 = ax}$$
$$\frac{AB}{BH} = \frac{BC}{HC} = \frac{AC}{BC} \iff \frac{b}{h} = \frac{c}{y} = \frac{a}{c} \implies \boxed{c^2 = ay}$$

Desta forma, como $a = x + y$,

$$b^2 + c^2 = ay + ax = a(y + x) = a \cdot a = a^2,$$

e o Teorema de Pitágoras está provado.

Exercício 4. Calcule a hipotenusa dos triângulos rectângulos cujos catetos apresentam os seguintes valores:

a) 1 e 0.5

b) 14Km e 14Km

c) 2.8cm e 8.2cm

Aplicação 5. Sabendo que a hipotenusa de um triângulo rectângulo mede $10cm$ e um dos catetos mede $6cm$, diga quanto mede o outro cateto.

Resolução. $10^2 = x^2 + 6^2$, ou seja, $100 = x^2 + 36$, donde $x^2 = 100 - 36 = 64$, e assim $x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$. Como os comprimentos não podem ser negativos, a resposta é $x = 8cm$.

Exercício 5. Calcule o cateto em falta dos triângulos rectângulos cuja hipotenusa e cateto apresentam os seguintes valores:

a) 8 e 7

b) 2.2Km e 2.8Km

c) a hipotenusa de um triângulo isósceles mede 12Km

Exercício 6.

a) Determine os lados de um triângulo rectângulo sabendo que um cateto mede 1 e o outro mede metade da hipotenusa.

b) Determine os lados de um triângulo rectângulo sabendo que a hipotenusa mede 5 e um cateto mede o dobro do outro.

c) Diga justificando se existe algum triângulo rectângulo isosceles cuja hipotenusa mede o dobro dos catetos?

d) Uma sequência de números **inteiros** (a, b, c) diz-se *pitagórica* se $a^2+b^2 = c^2$. Por exemplo, $(3, 4, 5)$ é uma sequência pitagórica.

- encontre outra sequências pitagóricas.
- encontre um conjunto infinito de sequências pitagóricas.

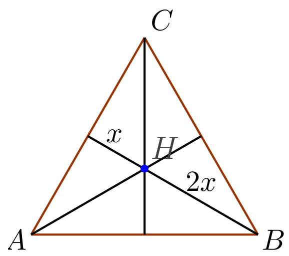
Aplicação 6. Sabendo que num rectângulo, a diagonal mede 5 e o maior lado mede 4, diga quanto mede o menor lado.

Resolução. $5^2 = x^2 + 4^2$, ou seja, $9 = x^2$, donde $x = \pm 3$.

Aplicação 7. Sabendo que num triângulo isósceles a base mede 10m e cada um dos outros lados mede 12m, calcule a altura e a área do triângulo.

Resolução. A perpendicular ao ponto médio da base divide o triângulo em dois triângulos rectângulos de base 5m, e hipotenusa 12m. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, a altura é aproximadamente 10.91m. Como a área de um triângulo é metade da base vezes a altura, temos que a área de um dos triângulos rectângulos é $\frac{1}{2}\times 5\times 10.91$. Isto dá aproximadamente $27.27m^2$. Uma vez que o triânglo original tem o dobro da área, temos que a área do triângulo original é aproximadamente $54.6m^2$.

Facto: Num triângulo equilátero as alturas intersectam-se num ponto interior H, chamado o centro do triângulo. Este ponto divide qualquer altura em dois segmentos cuja razão é 2.



Exercício 7.

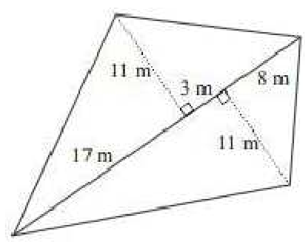
a) Se num rectângulo a diagonal mede 10cm, e o maior lado mede o dobro do menor, quanto medem os lados?

b) Num rectângulo de lados a e b, temos $a/b = 5/2$. Se a diagonal mede 30cm, calcule o perímetro e a área do rectângulo.

c) Um triângulo equilátero tem 12m de lado. Diga quanto mede a altura e calcule a área.

d) Diga justificando se uma viga de 11m pode ser colocada num camião de caixa fechada com 10m de comprimento, 4m de altura e 3m de largura.

e) Calcule o perímetro da seguinte figura



f) Sabendo que a priâmide de Rhizé tem 160m de altura (e supondo que é um tetraedro perfeito) calcule a medida do lado da pirâmide.

g) Sabendo que a pirâmide de Rham é um tetraedro perfeito de lado 120m, calcule a altura da pirâmide.

3. O Recíproco do teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras diz que num triângulo rectângulo, com hipotenusa a e catetos b e c, temos

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

O Recíproco do Teorema de Pitágoras diz que se num triângulo de lados a, b e c temos

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

então o triângulo é rectângulo.

Aplicação 8. Será que $(4, 5, 6)$ podem ser as medidas dos lados de um triângulo rectângulo?

Resolução. Se 4, 5 e 6 fossem as medidas dos lados de um triângulo rectângulo, então, pelo Recíproco do Teorema de Pitágoras, deveremos ter $6^2 = 5^2 + 4^2$. Contudo $36 \neq 25 + 16$, pelo que nenhum triângulo rectângulo pode ter lados com estas medidas.

Exercício 8.

a) Considere um triângulo cujos lados medem 12, 16 e 25. Diga se este triângulo é rectângulo.

b) Encontre um triângulo rectângulo cuja hipotenusa mede o dobro de um dos catetos.

c) Prove que para todo o número natural n existe um triângulo rectângulo cujos lados medem $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$.

d) Suponhamos que estava a usar um esquadro, mas tinha dúvidas sobre se um dos ângulos é mesmo recto. Como poderia resolver o problema? (Meça os lados do esquadro e verifique).

4. Coordenadas na recta

A Geometria Analítica Plana permite-nos representar pontos de uma recta por números reais e pontos do plano por pares ordenados de números reais. Deste modo, as curvas no plano podem ser descritas por meio de equações, o que torna possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas.

Seja r uma recta. Dizemos que r é uma *recta orientada* quando sobre ela escolhemos um sentido de percurso, chamado *positivo*. O sentido oposto sobre a recta r é denominado *negativo*.

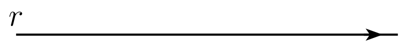


Figura 1: Escolha de um sentido de percurso na recta r.

A recta orientada r diz-se um *eixo* se fixarmos em r um ponto O a que chamaremos *origem*.

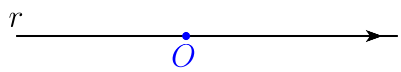


Figura 2: Origem O escolhida no eixo r.

Um ponto $A \in r$ diz-se à *direita* do ponto O se o sentido de percurso de O para A coincide com o sentido positivo escolhido na recta r. Caso contrário diz-se à *esquerda* do ponto O ([1]).

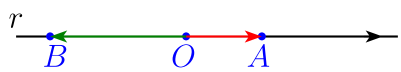


Figura 3: A está à direita de O e B está à esquerda de O no eixo r

Todo eixo r pode ser posto em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$

$$\boxed{r \longleftrightarrow \mathbb{R}}$$

de modo que a cada ponto X de r corresponda a medida do segmento $[OX]$, se X está à direita de O e o simétrico desta medida se X estiver à esquerda de O. Para isso é necessário fixar um ponto A à direita de O e usar a medida do segmento $[OA]$ para unidade de comprimento.

[1] A origem O divide a recta r em duas semi-rectas: a semi-recta positiva $\overrightarrow{OA}$ e a semi-recta negativa $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}^{-}$. A recta r também pode escrever-se $r = \overleftrightarrow{OA} = \overleftrightarrow{OB}$.

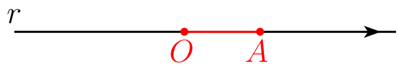


Figura 4: Fixar uma unidade de comprimento em r

- à origem O do eixo faz-se corresponder o número 0;
- ao ponto A faz-se corresponder o número 1;
- a qualquer ponto X de r à direita de O corresponde o número real positivo x tal que OX (= medida do segmento $[OX]$) seja igual a x vezes OA (que por escolha de A é 1).
- a cada ponto X de r à esquerda de O corresponde o número real negativo $-x$ tal que OX seja igual a x vezes OA.

O número real x, correspondente ao ponto X, é chamado a *coordenada* do ponto X no eixo r

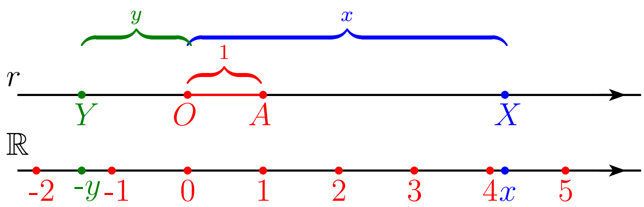


Figura 5: Coordenadas dos pontos X e Y em relação à origem O cuja unidade é OA.

Os pontos de uma recta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais, ou seja:

- a cada ponto da recta corresponde exactamente um número real,
- a cada número real corresponde exactamente um ponto da recta.

O conceito de recta numerada foi introduzido em 1619 por René Descartes (1596- 1650). Com efeito, Descartes percebeu que a idéia de determinar posições utilizando rectas, escolhidas como referência, poderia ser aplicada à matemática. Para isso usou rectas numeradas, ou seja rectas em que cada ponto corresponde a um número e cada número corresponde a um ponto, definindo desta maneira, um sistema de coordenadas na recta. Este conceito é conhecido como o *Postulado da Régua*: uma régua infinita que pode ser colocada em qualquer recta e que pode ser utilizada para medir a distância entre dois pontos quaisquer.

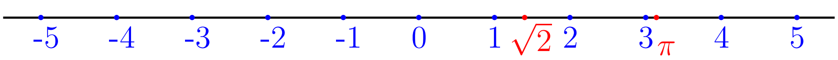


Figura 6: Régua infinita

5. Distância entre dois pontos num eixo

Dado um sistema de coordenadas podemos determinar a distância entre dois pontos quaisquer do eixo r, que corresponde à medida do segmento que formam, que será o valor absoluto da diferença dos números reais a eles associados.

Sejam X e Y dois pontos sobre o eixo r com coordenadas x e y respectivamente. Então,

$$\boxed{d(X,Y) = XY = |y - x| = |x - y|}. \tag{1}$$

Justificação. Se $X = Y$ então $[OX] = [OY]$ e, portanto, $x = y$. Logo $d(X,Y) = 0 = |x - y|$. Suponhamos que $X \neq Y$. Podemos assumir que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$. Temos três casos a considerar:

Caso 1: $O - X - Y$. Neste caso $0 < x < y$.

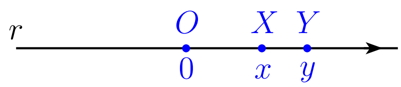


Figura 7: Caso 1: $0 < x < y$

Como X está entre O e Y, então $d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y)$. Assim, como $d(O,X) = x$ e $d(O,Y) = y$, temos

$$y = x + d(X,Y)$$

e, portanto,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 2: $X - Y - O$. Quer dizer que X e Y estão à esquerda da origem. Logo, $x < y < 0$.

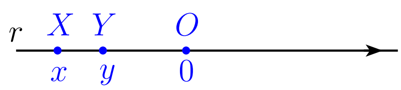


Figura 8: Caso 2: $x < y < 0$

Neste caso, Y está entre X e O, e temos $d(O,X) = -x$, $d(O,Y) = -y$. Segue-se que

$$\begin{aligned} d(O,X) = d(X,Y) + d(Y,O) &\iff -x = d(X,Y) - y \\ &\iff d(X,Y) = y - x = |y - x|. \end{aligned}$$

Caso 3: $X - O - Y$. Quer dizer que X e Y estão em lados opostos em relação à origem. Isto é, $x < 0 < y$.

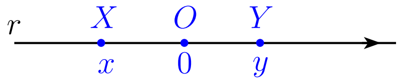


Figura 9: Caso 3: $x < 0 < y$

Como O está entre X e Y, então $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y)$. Além disso, $d(X,O) = -x$ e $d(O,Y) = y$. Logo,

$$d(X,Y) = -x + y = y - x = |y - x|.$$

Para o caso de X estar à direita de Y basta trocar os papéis de X com Y, nos três casos tratados acima.

Por definição o *ponto médio de um segmento* $[AB]$ é o ponto M tal que $d(A,M) = d(B,M)$.

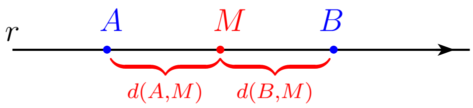


Figura 10: Ponto médio de um segmento

Sejam A e B dois pontos sobre o eixo r com coordenadas x e y respectivamente, e M o ponto médio do segmento $[AB]$, de coordenada m. Então,

$$m = \frac{x + y}{2}. \tag{2}$$

Justificação. De facto, suponhamos que A está à esquerda de B . Como o ponto médio M está entre A e B, temos $x < m < y$. Logo, pela fórmula (1),

$$d(M,A) = |x - m| = m - x \quad \text{e} \quad d(M,B) = |y - m| = y - m.$$

Por definição de ponto médio $d(M,A) = d(M,B)$. Logo $m - x = y - m$ e, portanto, $2m = x + y$. Ou seja $m = \frac{x+y}{2}$.

Aplicação 9. Considere os pontos A e B de coordenadas -2 e 5, respectivamente. Determine $d(A,B)$ e determine as coordenadas do ponto médio do segmento $[AB]$.

Resolução. Pela fórmula 1, temos $d(X,Y) = |5 - (-2)| = |7| = 7$. Agora, pela fórmula 2, temos $m = \frac{x+y}{2} = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$.

Exercício 9. Resolva um problema idêntico supondo que A e B têm coordenadas -5 e 2, respectivamente.

6. Coordenadas no plano

Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (a, b), onde a e b são números reais. O número a chama-se a *primeira coordenada* e o número b chama-se a *segunda coordenada* do par ordenado (a, b).

Um sistema de eixos ortogonais no plano é constituído de duas rectas orientadas x e y, perpendiculares entre si e com a mesma origem O. A recta orientada x é denominada *eixo x* ou *eixo das abscissas*; a recta orientada y é denominada *eixo y* ou *eixo das ordenadas*. De modo geral, o eixo x é uma recta horizontal (ver secção 16.) com o sentido positivo para a direita e o eixo y é uma recta vertical (ver secção 16.) com o sentido positivo para cima.

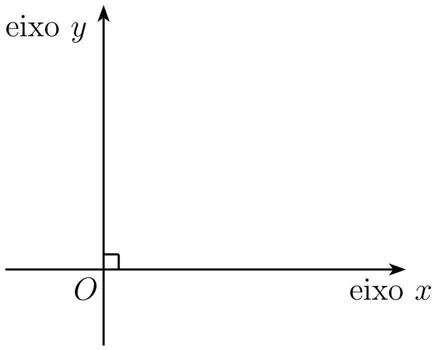
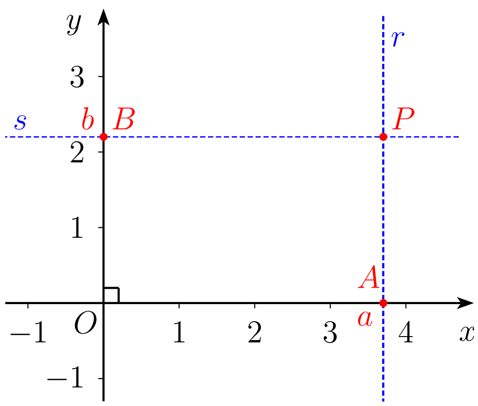


Figura 11: Sistema de eixos ortogonais no plano

Fixando nos eixos x e y unidades de comprimento, obtemos um *sistema de eixos ortogonais coordenados*. O plano, munido deste sistema de coordenadas, geralmente é chamado *plano cartesiano*. A posição de qualquer ponto P do plano será determinada por um par de números reais (a, b) os quais indicam as distâncias do ponto P às rectas de referência (os eixos coordenados). Estas distâncias são medidas, usando-se a escala estabelecida, a partir de rectas paralelas aos dois eixos x e y.



$s \parallel \text{eixo } x, \quad r \parallel \text{eixo } y$

$A = r \cap \text{eixo } x, \quad B = s \cap \text{eixo } y$

$a = d(P, A) = PA$

$b = d(P, B) = PB$

Figura 12: Coordenadas no plano cartesiano

Desta forma, os pontos do plano podem ser postos em correspondência biunívoca com os pares de números reais, ou seja:

- todo ponto P determina um par ordenado de números reais: sejam
  - $*$ r e s duas rectas a passar pelo ponto P tais que r é paralela ao eixo x e s é paralela ao eixo y,
  - $*$ a a coordenada no eixo x do ponto A de intersecção da recta r com o eixo x, e b a coordenada no eixo y do ponto B de intersecção da recta s com o eixo y.

  então associa-se ao ponto P o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- todo o par ordenado de números reais (a, b) determina um único ponto do plano: se
  - $*$ A é o ponto do eixo x de coordenada a, B é o ponto do eixo y de coordenada b;
  - $*$ r é a recta paralela ao eixo x que passa por A e s é a recta paralela ao eixo y que passa por B

  então r e s intersectam-se num ponto P do plano.

Os números reais a e b chamam-se as *coordenadas cartesianas* do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado, e escrevemos $P(a, b)$. A coordenada a é a *abscissa* de P e b é a *ordenada* de P.

Observação 4.

a) No eixo x, os pontos têm coordenadas $(a, 0)$. No eixo y, os pontos têm coordenadas $(0, b)$. Ver Figura 13.

b) A ordem pela qual as coordenadas são escritas é importante. Por exemplo, os pares $(1, 3)$ e $(3, 1)$ são diferentes e representam pontos distintos do plano cartesiano. Ver Figura 13.

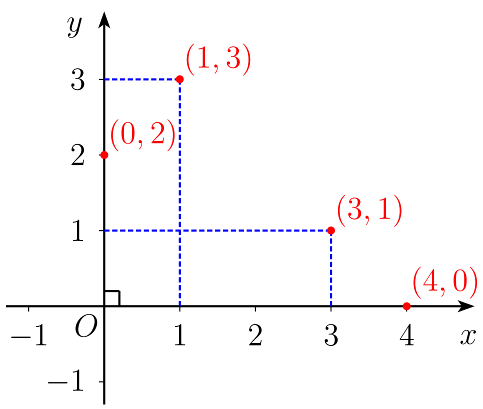


Figura 13: Pontos nos eixos coordenados e a importância da ordem nas coordenadas

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas *quadrantes*:

1° Quadrante $= \{(a,b) : a > 0 \text{ e } b > 0\} =$ conjunto dos pontos do plano com abcissas e ordenadas positivas

2° Quadrante $= \{(a,b) : a < 0 \text{ e } b > 0\} =$ conjunto dos pontos do plano com abcissas negativas e ordenadas positivas

3° Quadrante $= \{(a,b) : a < 0 \text{ e } b < 0\} =$ conjunto dos pontos do plano com abcissas e ordenadas negativas

4° Quadrante $= \{(a,b) : a > 0 \text{ e } b < 0\} =$ conjunto dos pontos do plano com abcissas positivas e ordenadas negativas

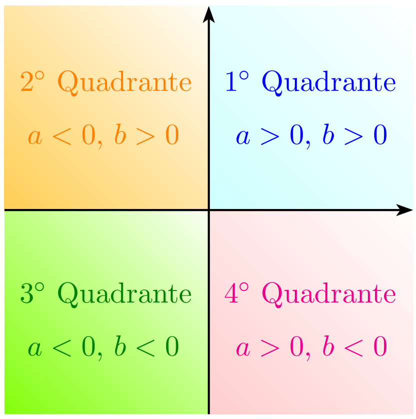


Figura 14: Quadrantes

Cada ponto do plano ou pertence a um dos eixos coordenados ou a um dos quadrantes. As rectas paralelas aos eixos coordenados e que passam pelos pontos de coordenadas inteiras nos eixos x e y formam uma *grelha* no plano.

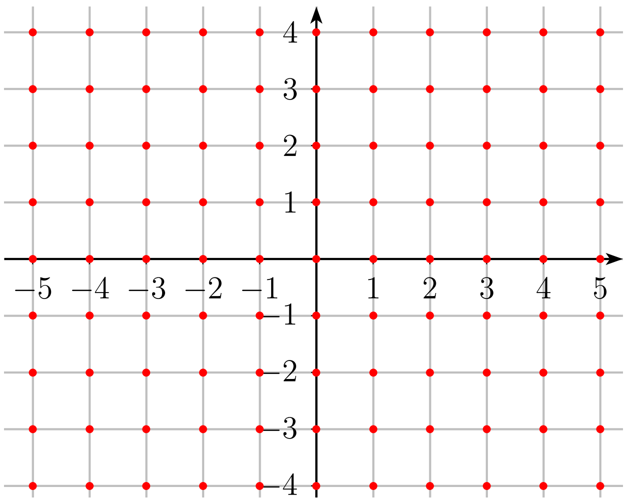


Figura 15: Os pontos a vermelho têm a forma (a,b) com $a, b \in \mathbb{Z}$

Aplicação 10. Na figura 16 encontram-se representados vários pontos no plano cartesiano.

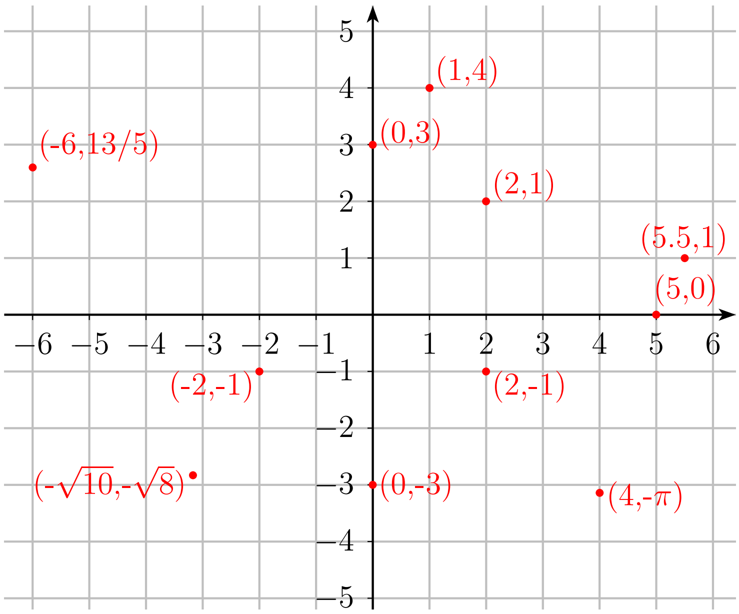


Figura 16: Representação de alguns pontos no plano

Os pontos $(1,4)$, $(2,1)$, $(5.5,1)$ estão no 1° Quadrante; os pontos $(-6,13/5)$, $(-2,1)$ estão no 2° Quadrante; os pontos $(-2,-1)$, $(-\sqrt{10},-\sqrt{8})$ estão no 3° Quadrante; os pontos $(4,-\pi)$, $(2,-1)$ estão no 4° Quadrante; o pontos $(5,0)$ está no eixo x; os pontos $(0,3)$, $(0,-3)$ estão no eixo y.

Exercício 10. Utilize a grelha da aplicação 10 para marcar os pontos $(5,2)$, $(-3,0)$, $(5,-2)$, $(-5,2)$, $(-5/2,-3)$, $(\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2}/2,0.5)$. Indique em que quadrante, ou eixo cartesiano, estes pontos se encontram.