Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 4 a 14 de maio de 2018

Data de Limite de Entrega

14 de maio de 2018, até às 23h55 de Portugal Continental

Tema

Teoria elementar de números

Competências

Saber aplicar e manipular técnicas básicas aprendidas nos seguintes contextos:

a) divisibilidade e os algoritmos da divisão e de Euclides;

b) máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum;

c) números primos e o teorema fundamental da aritmética;

d) relações de congruência de números inteiros e aritmética modular.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os oito exercícios constantes no enunciado.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores;

2. Com excepção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valores. Por cada resposta incorrecta serão descontados 0.1 valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**
0.5 val.	**1.0** val.	**0.5** val.	**0.6** val.	**0.5** val.

Normas a respeitar

Deve redigir o seu E-fólio na Folha de Resolução disponibilizada na turma e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu E-fólio por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Se tiver publicado o seu trabalho na Internet, cole na Folha de Resolução a hiperligação para o mesmo.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu E-fólio não deve ultrapassar **seis** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Gilda Ferreira e Ana Nunes

Enunciado

1. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $mdc(a,b) = 12$. Relativamente à equação

$$ax + by - 347 = 0$$

podemos afirmar que: (Escolha a opção correta)

a) Admite mais do que duas soluções inteiras em x e y.

b) Admite exatamente duas soluções inteiras em x e y.

c) Admite exatamente uma solução inteira em x e y.

d) Não admite solução inteira em x e y.

2. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $5^k \mid 800!$ e $5^{k+1} \nmid 800!$. Temos que:
(Escolha a opção correta)

a) $k = 198$

b) $k = 199$

c) $k = 200$

d) Nenhuma das opções anteriores

3. Considere as seguintes afirmações:

i) 5 é inverso multiplicativo de $72 \pmod{7}$.

ii) Se $7a \equiv 7b \pmod{12}$ e $b \equiv c \pmod{12}$ então
$a^2 - b \equiv c^2 - c \pmod{12}$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Relativamente às afirmações acima temos que:
(Escolha a opção correta)

a) Ambas as afirmações são verdadeiras.

b) A afirmação i) é verdadeira e a afirmação ii) é falsa.

c) A afirmação i) é falsa e a afirmação ii) é verdadeira.

d) Ambas as afirmações são falsas.

4. Prove que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, se tem que $24n^3 + 5$ e $18n^3 + 4$ são primos entre si.

5. (a) Recorrendo ao algoritmo de Euclides determine $mdc(1818, 305)$.

(b) Encontre uma solução inteira da equação $1818x + 305y = 1$.

6. Indique, justificando, o número de divisores positivos de 52920 que não são múltiplos de 2.

7. Seja $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e tomemos $n = a^{8192} + 1$ e $m = a^{4096} + 1$.

a) Estude $\frac{n}{m}$ quanto à irredutibilidade[1].

b) Determine o $mmc(n, m)$ em função de a.

8. Mostre que n ser primo é condição necessária mas não suficiente para $2^n - 1$ ser primo[2].

FIM

[1] Sugestão: Note que ou a é par ou a é ímpar.

[2] Sugestão: Na prova de "condição necessária" pode recorrer à igualdade $2^{rs} - 1 = (2^r - 1) \sum_{i=0}^{s-1} 2^{ri}, \quad r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Para mostrar que "não é condição suficiente" basta apresentar um contraexemplo.