

Proposta de Resolução do e-fólio B

21037 Elementos de Probabilidade e Estatística

Ano Letivo 2015/2016

1. Definição de acontecimentos, considerando que são efetuados 2 voos:

I_i – Mala i extravai-se na ida, $i = 1, 2$

R_i – Mala i extravai-se no regresso, $i = 1, 2$

Sabe-se que:

$$P(I) = \frac{1}{5} \qquad P(\bar{I}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$P(R|\bar{I}) = \frac{1}{16} = \frac{\frac{1}{16} \times \frac{4}{5}}{\frac{4}{5}} \qquad P(\bar{R}|\bar{I}) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

Os acontecimentos são independentes. As probabilidades associadas a cada mala são iguais.

1.1.1

$$P(I) \times P(R|\bar{I}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{80} = 0,0125 = 1,25\%$$

1.1.2

$$P(I_1) \times P(I_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25} = 0,04 = 4\%$$

1.1.3

$$P(\bar{I} \cap R) \times P(\bar{I} \cap R) = \frac{1}{16} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{6400} = 0,0025 = 0,25\%$$

1.2

$$P(I) + P(\bar{I} \cap R) = \frac{1}{5} + \frac{1}{16} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{4}{80} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

Em média terão de ser realizadas 4 viagens para se perder uma mala.

1.3

$$X \rightarrow \text{Número de malas extraviadas} \qquad X \sim B(n, p)$$

$$n = 20 \wedge p = \frac{1}{4} \quad (\text{probabilidade de se extraviar uma mala}). \quad X \sim B\left(20, \frac{1}{4}\right)$$

$$E[X] = np = 20 \times \frac{1}{4} = 5$$

Proposta de Resolução do e-fólio B

21037 Elementos de Probabilidade e Estatística

Ano Letivo 2015/2016

2. Distribuição Hipergeométrica ; $X \sim H(N; n; p)$

$$f(x) = \frac{\binom{Np}{x} \binom{Nq}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$N = 20 \wedge n = 5 \wedge p = \frac{20-8}{20} = \frac{12}{20} = 0,6 \wedge q = \frac{8}{20} = 0,4$$

$$X \sim H(20; 5; 0,6)$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{\binom{12}{3} \binom{8}{2}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{12}{4} \binom{8}{1}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{12}{5} \binom{8}{0}}{\binom{20}{5}} \\ &= \frac{6160 + 3960 + 792}{15504} = 0,703818 = 70,38\% \end{aligned}$$

2.2

$$P(X = 5) = \frac{\binom{12}{5} \binom{8}{0}}{\binom{20}{5}} = \frac{792}{15504} = 0,05108 = 5,11\%$$

Proposta de Resolução do e-fólio B

21037 Elementos de Probabilidade e Estatística

Ano Letivo 2015/2016

3. Distribuição Poisson

X → Número de ocorrências de um acontecimento num determinado intervalo de tempo ou de espaço.

$$X \sim Po(\lambda) \quad ; \quad f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

3.1.1

$$X \sim Po(5)$$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-5} 5^0}{0!} = e^{-5} = \frac{1}{e^5} = 0,006738 = 0,67\%$$

3.1.2

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] = \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-5} 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} 5^2}{2!} \right] = 1 - [0,006738 + 0,03369 + 0,084224] = 1 - 0,12465 \\ &= 0,875348 \end{aligned}$$

3.2

3.2.1

Distribuição Binomial

X → Número de pedidos de aquisição de PC's satisfeitos por semana

$X \sim B(n, p)$; $n = 8 \wedge p = 0,90$; $X \sim B(8; 0,9)$

$$P(X = 6) = \binom{8}{6} 0,9^6 0,1^{8-6} = 0,148803 = 14,88\%$$

Proposta de Resolução do e-fólio B

21037 Elementos de Probabilidade e Estatística

Ano Letivo 2015/2016

3.2.2

$$E[X] = np = 8 \times 0,9 = 7,2$$

$$V[X] = npq = 8 \times 0,9 \times 0,1 = 0,72$$

$$s = \sqrt{0,72} = 0,848528$$

4.

$$4P(Y = 3) = P(Y = 5) \Leftrightarrow 4 \frac{e^{-\lambda} \lambda^3}{3!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^5}{5!} \Leftrightarrow 4 \frac{5!}{3!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^5}{e^{-\lambda} \lambda^3} \Leftrightarrow 4 \frac{5!}{3!} = \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 \times 5 \times 4 = \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda = \pm \sqrt{80}, \lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda = 8,944272$$

$$P(Y > 4) = 1 - P(Y \leq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)] = 0,942977$$
