ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

Jaime Fonseca

Vol. 1

EDIÇÕES SÍLABO

Capítulo 1

Probabilidades

1

EVOLUÇÃO HISTÓRICA

O cálculo de Probabilidades teve, eventualmente, o seu início com a correspondência trocada por Pierre de Fermat (1601-1665) e Blaise Pascal (1623-1662) no ano de 1654. O cavaleiro de Méré — jogador inveterado para uns, filósofo e homem de letras para outros — havia pedido a Pascal a resolução de problemas que se prendiam com a prática de jogos de azar, nomeadamente o jogo dos dados.

Consta que ele terá ganho uma soma considerável de dinheiro apostando na saída de pelo menos um seis em cada quatro lançamentos $(1-(5/6)^4 = 0{,}518 > 0{,}5)$, tendo-a perdido ao apostar na saída de pelo menos um doble de seis em cada 24 lançamentos de dois dados $(1-(35/36)^{24} = 0{,}491 > 0{,}51)$.

Thomas Bayes (1702-1761) ocupa-se da questão de como, conhecendo os resultados dos jogos, se podem estabelecer conclusões acerca das leis subjacentes, isto é, calcula a probabilidade de que um modelo ou uma hipótese sejam verdadeiros.

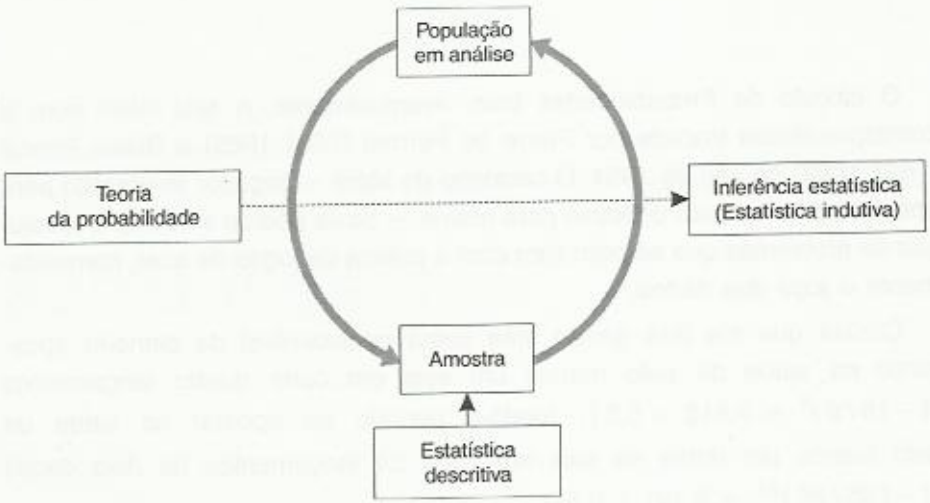
Em 1713 apareceram as obras de Jakob Bernoulli (1654-1705) — *Ars Conjectandi, Opus Postumum* — sobre o cálculo de probabilidades, incluindo já o conceito «estocástico», a distribuição Binominal e a lei dos grandes números. E surge a distribuição Normal como limite da Binomial, obtida por Abraham de Moivre (1667-1754; *The Doctrine of Chaucesme*, 1718).

Em 1812 surge a primeira exposição sistemática de todo o Cálculo de Probabilidades, em *Theorie Analytique des Probabilités*, por Pierre Simon Laplace (1748-1827), e assim a definição clássica de probabilidade de um acontecimento que pode ocorrer apenas num número finito de possibilidades.

Entretanto outros trabalhos foram surgindo e, a teoria matemática de probabilidade, tal como hoje é conhecida, tem origem relativamente recente. Em *Foundations of The Theory of Probability* (Berlim), 1933, A. N. Kolmogorov desenvolveu a teoria axiomática de probabilidade.

A teoria da probabilidade reveste-se de grande utilidade e importância ao longo de toda a estatística matemática, bem podendo essa importância ser realçada através do diagrama seguinte:

FIG. 1.1



2

ESPAÇO AMOSTRAL

A teoria da probabilidade é uma parte da matemática útil na descoberta e investigação das características regulares de acontecimentos aleatórios.

Suponhamos que se investiga a temperatura mensal média num local definido, num determinado mês, Janeiro, por exemplo, nas Penhas Douradas. É fácil entender que esta temperatura média depende de vários factores, tais como a humidade, a direcção e a força do vento. O efeito de tais causas muda de ano para ano, pelo que a temperatura média nas Penhas Douradas, em Janeiro, não será sempre igual.

Como resultado disto, não estaremos habilitados a prever com um grau de confiança suficiente, qual a temperatura média para um certo Janeiro. Trata-se, pois, de um fenómeno aleatório. Note-se, ainda, que o fenómeno de regularidade só começa a ser notado à medida que o número de observações seja grande. Vejamos alguns exemplos:

■ EXEMPLO 1.1

Lançamento de uma moeda.

Assumindo a moeda perfeita (equilibrada), só existem dois resultados possíveis para esta experiência: Face e Coroa. Todavia, em qualquer repetição desta experiência não sabemos qual será o resultado, *existindo incerteza* quanto a este.

■ EXEMPLO 1.2

Roleta.

Roda da roleta é um disco circular dividido em 39 sectores iguais, numerados desde 0 a 37 e 00. Pode-se apostar em qualquer dos 39 números ou algumas combinações deles. Pode ainda apostar-se na cor, vermelha ou preta. Se a bola para no sector 32, por exemplo, ganha quem apostou no 32 ou combinações que incluam o 32. Nesta experiência, todos os resultados possíveis são previamente conhecidos: 00, 0, 1, 2, ... , 37; mas *existe incerteza* quanto ao resultado, aquando da realização da experiência, desde que se possa considerar a roleta como não viciada.

■ EXEMPLO 1.3

Os tempos de vida de lâmpadas fluorescentes são registados.

Também neste caso não sabemos qual o tempo de vida de uma lâmpada seleccionada ao acaso; apenas podemos afirmar ser um número entre zero e infinitas horas.

As experiências descritas — bem como tantas outras — têm certos factores comuns. Para cada experiência conhecemos, antecipadamente, todos os resultados possíveis. Mas em cada realização da experiência não saberemos qual será o resultado específico, isto é, *existe incerteza* em relação ao resul-

tado, em qualquer repetição da experiência, supondo essas repetições em condições idênticas.

Estamos, assim em presença de experiências aleatórias, porquanto todas elas estão sujeitas à influência de factores casuais e conduzem a resultados incertos.

DEFINIÇÃO 1.1 **(Experiência Aleatória)**

Define-se experiência aleatória como sendo uma experiência na qual:

i) Todos os resultados possíveis da experiência são conhecidos previamente;

ii) O resultado de qualquer realização da experiência não é previamente conhecido, sendo portanto, incerto;

iii) A experiência pode ser repetida sob condições idênticas.

A incerteza de uma experiência aleatória é objecto de estudo em teoria das probabilidades. Associar-se-á a cada uma destas experiências um conjunto que designaremos por Ω, conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória, ao qual se chama Espaço de Resultados.

Aos seus elementos (resultados) chamaremos *acontecimentos elementares*. A cada Ω associar-se-á ainda uma classe $\mathcal{A}$ de acontecimentos probabilizáveis, que caracterizaremos a seguir e à qual chamamos Espaço de Acontecimentos.

Isto porque quando Ω não for mensurável, poderão existir subconjuntos de Ω que não interessa considerar como acontecimentos. Note-se, desde já, que $\varnothing$ e Ω serão sempre acontecimentos, portanto subconjuntos de $\mathcal{A}$, os quais designaremos por acontecimentos impossível e verdadeiro (certo), respectivamente.

Vamos agora estabelecer quais os subconjuntos de Ω que podem ser considerados como acontecimentos, uniformizando o tratamento de casos diferentes, em Ω numerável e não numerável. Isto porque se a definição de espaço de resultados é precisa e satisfatória, o mesmo não acontece com as definições de acontecimentos e espaço de acontecimentos.

Exige-se que a classe $\mathcal{A}$ verifique certas propriedades para dotá-la de uma estrutura.

DEFINIÇÃO 1.2 **(Álgebra de Acontecimentos)**

À classe não vazia $\mathcal{A}$, chamaremos Álgebra Booleana ou simplesmente Álgebra de Acontecimentos, caso ela satisfaça as seguintes condições:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$

ii) Se $A \in \mathcal{A}$, *então* $\overline{A} \in \mathcal{A}$.

iii) Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, *então* $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$.

Note-se, pois, que uma Álgebra de Acontecimentos é uma classe não vazia de subconjuntos de Ω que é fechada para um conjunto numerável de unidades e complementos e contém o acontecimento impossível $\varnothing$.

DEFINIÇÃO 1.3 **(Sigma-Álgebra)**

À classe não vazia $\mathcal{A}$, chamaremos Sigma-Álgebra (σ-álgebra de Boole) caso ela verifique as seguintes propriedades:

i) $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii) Se $A \in \mathcal{A}$; *então* $\overline{A} \in \mathcal{A}$;

iii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, *então* $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{A}$, *sendo o número de acontecimentos* A_j *finito ou infinito numerável.*

Pode demonstrar-se que uma σ-álgebra é uma álgebra, mas não necessariamente o recíproco.

Neste momento chama-se à atenção para algumas propriedades das operações definidas sobre acontecimentos, as mesmas que foram deduzidas dentro da álgebra de conjuntos:

1. Comutatividade: $\forall A, B \in \mathcal{A}$:

$$A \cup B = B \cup A \quad e \quad A \cap B = B \cap A;$$

2. Associatividade: $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \; e \; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

3. Distributividade: $\forall A, B, C \in \mathcal{A}$:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad e$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

4. Idempotência: $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$;

5. Absorção: $A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$ e $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$;

6. Modulares: $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \Omega = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$;

7. Leis de Morgan:

$$i)\ \overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad e \quad \overline{\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};$$

$$ii)\ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad e \quad \overline{\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i};$$

A um espaço munido de uma σ-álgebra $\mathcal{A}$, chama-se mensurável e representa-se por $(\Omega, \mathcal{A})$.

DEFINIÇÃO 1.4 **(Espaço amostra)**

Chama-se espaço amostra de uma experiência aleatória ao espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$.

A qualquer conjunto $A \in \mathcal{A}$ *chama-se acontecimento. Assim, A será uma colecção de resultados. Cada resultado é conhecido como acontecimento simples ou elementar.*

DEFINIÇÃO 1.5 **(Espaço amostra finito)**

Diz-se que $(\Omega, \mathcal{A})$ *é um espaço amostra finito se o conjunto* Ω *apenas contém um número finito de resultados.*

DEFINIÇÃO 1.6 **(Espaço amostra discreto)**

Diz-se que $(\Omega, \mathcal{A})$ é um espaço amostra discreto se Ω contém quando muito um número de resultados finito ou infinito numerável.

DEFINIÇÃO 1.7 **(Espaço amostra infinito)**

Diz-se que $(\Omega, \mathcal{A})$ é um espaço amostra infinito se Ω contém um número não numerável de resultados.

DEFINIÇÃO 1.8 **(Espaço amostra contínuo)**

Se $\Omega = IR^k$ ou qualquer rectângulo em IR^k, dir-se-á que $(\Omega, \mathcal{A})$ é um espaço amostra continuo.

Um dos exemplos mais importantes de espaço amostra não numerável diz respeito ao caso em que $\Omega = IR$, ou um intervalo de IR. Neste caso, todos os valores de IR e todos os intervalos — abertos, semi-abertos e fechados — serão acontecimentos. Mais adiante voltaremos a esta situação.

Vejamos, de seguida, alguns exemplos de experiências aleatórias e, para cada, os respectivos espaço de resultados e espaço amostra, notando-se sempre a relação $\#\mathcal{A} = 2^{\#\Omega}$.

■ EXEMPLO 1.4

Seja a experiência aleatória que consiste no lançamento de uma moeda perfeita.

Para esta experiência aleatória, ter-se-ia:

$\Omega = \{F, C\}$, o conjunto de símbolos F e C, obtenção de Face e Coroa, respectivamente.

$\mathcal{A} = \{\varnothing, F, C, \{F, C\}\}$ ou $\mathcal{A} = \{\varnothing, F, C, \Omega\}$, classe de todos os subconjuntos de Ω.

Note-se que: $\#\Omega = 2$; $\#\mathcal{A} = 2^2 = 4$

■ EXEMPLO 1.5

Considere-se, agora, que a moeda é lançada duas vezes. Ter-se-ia identicamente:

$\Omega = \{(F,F),(F,C),(C,F),(C,C)\}$, e

$\mathcal{A} = \{\varnothing,\{F,F\},\{F,C\},\{C,F\},\{C,C\},\{(F,F),(F,C)\},\{(F,F),(C,F)\},$
$\{(F,F),(C,C)\},\{(F,C),(C,F)\},\{(C,C),(C,F)\},\{(C,C),(F,C)\},$
$\{(F,F),(F,C),(C,F)\},\{(F,F),(F,C),(C,C)\},\{(F,F),(C,F),(C,C)\},$
$\{(F,C),(C,F),(C,C)\},\Omega\}.$

$\#\Omega = 4$ e $\#\mathcal{A} = 2^4 = 16.$

■ EXEMPLO 1.6

Lançamento de uma moeda até aparecer a primeira Face.

Nesta situação ter-se-ia:

$$\Omega = \{F,(C,F),(C,C,F),(C,C,C,F),(C,C,C,C,F),\ldots\}$$

e $\mathcal{A}$ seria a classe de todos os subconjuntos de Ω.

Note-se que, neste caso, o espaço de resultados é constituído por uma infinidade numerável de elementos.

Outro raciocínio possível para definir Ω consistiria em observar o número de lançamentos até «acontecer» Face pela primeira vez.

Então, ter-se-ia:

$\Omega = \{1,2,3,4,\ldots\ldots\}$, conjunto de todos os inteiros positivos. Assim, $\mathcal{A}$ seria a classe de todos os subconjuntos de inteiros positivos.

■ EXEMPLO 1.7

A observação do tempo de vida, em determinadas unidades, de uma componente electrónica de certo sistema, representa uma experiência aleatória, para a qual:

$\Omega = \{x : x > 0\}$, e $\mathcal{A}$ seria, neste caso, a classe de todos os subconjuntos de reais positivos.

Estamos perante uma experiência aleatória para a qual Ω é um espaço de resultados contínuo e $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço amostra contínuo.

Aqui se chama à atenção para o facto de nem todos os subconjuntos de Ω serem acontecimentos, ao contrário do que acontece quando $(\Omega, \mathcal{A})$ é discreto. Não há qualquer inconveniente nessa situação, na qual Ω contém elementos que não podem resultar da experiência; o contrário seria grave, caso Ω não tivesse todos os resultados possíveis.

Outros resultados derivam directamente das três propriedades que definem uma σ-álgebra.

TEOREMA 1.1

$\varnothing \in \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO

Através de (i) e (ii), respectivamente,

$$\Omega \in \mathcal{A} \quad e \quad \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$$

Mas sendo $\overline{\Omega} = \varnothing$, *então* $\varnothing \in \mathcal{A}$.

TEOREMA 1.2

Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, *então* $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO

Através de (ii) e (iii), tem-se, respectivamente,

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2 \in \mathcal{A} \quad e \quad \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \in \mathcal{A}.$$

Novamente por (ii),

$$\overline{(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2)} \in \mathcal{A}$$

e, consequentemente,

$$(\overline{\overline{A}_1} \cap \overline{\overline{A}_2}) = A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}.$$

TEOREMA 1.3

Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, *então* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

DEMONSTRAÇÃO

Através de (ii),

$$\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_2, \ldots \in \mathcal{A};$$

usando (iii),

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A};$$

novamente através de (ii),

$$\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A}_i} \right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

PROBLEMAS 1.2

1 Considere o lançamento de um dado equilibrado.

a) Represente o espaço de resultados;

b) Indique os acontecimentos que pertencem à σ-álgebra de Boole.

2 Considere o lançamento de duas moedas perfeitas. Defina os seguintes acontecimentos:

a) A = { saída de exactamente uma Face ou de exactamente uma Coroa };

b) B = { saída de uma Face na primeira moeda };

c) C = { saída de pelo menos uma coroa }.

3 Sejam A, B, C três acontecimentos associados a uma certa experiência aleatória. Defina, em notação de acontecimentos:

a) Pelo menos um dos acontecimentos ocorre;

b) Apenas ocorre o acontecimento A;

c) Ocorre exactamente um dos acontecimentos;

d) Ocorrem exactamente dois dos acontecimentos;

e) Não mais de dois acontecimentos ocorrem simultaneamente.

4 Considere o lançamento de dois dados equilibrados. Para esta experiência aleatória defina os acontecimentos seguintes:

a) A = { saída apenas de faces 4 ou 5 }

b) B = { saída de uma soma de duas faces inferior a 4 }

c) C = { saída de uma soma de duas faces igual a 5 }.

5 Considere o tempo de vida útil de um componente electrónico, em horas, admitindo, assim, que $\Omega = \{t : t > 0\}$.

Sejam os acontecimentos:

$A = \{t : t > 800\}$;

$B = \{t : 600 < t < 1000\}$;

$C = \{t : t < 700\}$.

Nestas condições caracterize os acontecimentos seguintes:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$;

b) $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$;

c) $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$.

6 Considere um lote de lâmpadas com duas lâmpadas defeituosas (numeradas de 1 a 2) e três perfeitas (numeradas de 3 a 5). Realiza-se uma experiência que consiste na extracção de duas lâmpadas sem reposição. Defina os acontecimentos seguintes:

a) Espaço de resultados:

b) A = { saída de uma lâmpada defeituosa na 1ª tiragem }

B = { saída de uma lâmpada defeituosa na 2ª tiragem }

C = { saída de nenhuma lâmpada defeituosa }

3

DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

DEFINIÇÃO 1.9

Definição Clássica ou de Laplace. Ω finito.

Em 1812, Laplace apresenta esta definição do modo seguinte:

— «Probabilidade de um acontecimento é o quociente entre o número de casos favoráveis ao acontecimento e o número de casos possíveis, todos os casos supostos igualmente prováveis».

Se uma experiência aleatória pode ter n resultados diferentes — número de casos possíveis — igualmente prováveis e que se excluem mutuamente, dos quais n(A) têm a característica A, então a probabilidade associada ao acontecimento A será o número

$$P(A) = \frac{n(A)}{n} \tag{1.1}$$

■ EXEMPLO 1.8

Qual a probabilidade de se obter uma face ímpar, aquando do lançamento de um dado perfeito?

RESOLUÇÃO

Para esta experiência, como já sabemos, ter-se-ia $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e, consequentemente, $n = 6$.

Por outro lado, definindo A = {sair face ímpar}, $A = \{1, 3, 5\}$, ter-se-ia $n(A) = 3$. *Assim,*

$$P(A) = \frac{\text{«número de casos favoráveis a } A\text{»}}{\text{«número de casos possíveis»}} = \frac{n(A)}{n} = \frac{3}{6}$$

EXEMPLO 1.9

Numa caixa estão 30 peças das quais 5 são defeituosas. Extrai-se, aleatoriamente uma peça. Qual a probabilidade da peça ser defeituosa?

RESOLUÇÃO

Claramente se tem, para esta experiência, definindo A = { peça defeituosa }, $n(A) = 5$ e $n = 30$; consequentemente, $P(A) = 5/30$.

EXEMPLO 1.10

Na situação do lote de peças do exemplo anterior — 30 peças — suponha-se que um potencial comprador apenas aceita esse lote caso haja quando muito uma peça defeituosa, numa amostra de 5.

Qual a probabilidade de que ele aceite o lote, caso este contenha 6 peças defeituosas?

RESOLUÇÃO

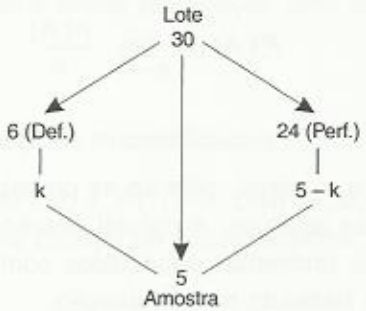
Sejam os acontecimentos:

A = { Aceitação do lote };

D_0 = { Nenhuma peça defeituosa };

D_1 = { Uma peça defeituosa }.

Ter-se-á então, $P(A) = P(D_0) + P(D_1)$.



$$P(D_0) = \frac{\text{«número de casos favoráveis»}}{\text{«número de casos possíveis»}} = \frac{\binom{6}{0}\binom{24}{5}}{\binom{30}{5}} = \frac{\binom{24}{5}}{\binom{30}{5}} = 0{,}298$$

$$P(D_1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{24}{4}}{\binom{30}{5}} = 0{,}447$$

Consequentemente, $P(A) = 0{,}745$.

A definição apresenta alguns problemas:

1. Dificuldade, por vezes, na determinação de $n(A)$ e n.
2. Apenas pode aplicar-se a uma classe limitada de problemas. Por exemplo, na experiência do dado, a sua aplicabilidade apenas resulta quando as seis faces tenham a mesma probabilidade. Caso o dado seja não equilibrado e a probabilidade de ocorrer face 3 seja, por exemplo, 0,2, a probabilidade não pode obter-se de (1.1).
3. Estar restringida à situação em que o número de resultados seja finito.
4. Determinação a priori, sem a realização real da experiência.

DEFINIÇÃO 1.10

Definição Frequencista.

A probabilidade de qualquer acontecimento A define-se através do limite da frequência relativa desse mesmo acontecimento numa sucessão de experiências realizadas sob o mesmo conjunto de condições:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \tag{1.2}$$

Esta definição parece razoável, pois se as probabilidades são usadas na descrição de frequências relativas, é natural defini-las como limites de tais frequências. Também os problemas associados com definições a priori são eliminados e a teoria é baseada na observação.

Contudo, se o conceito frequencista é fundamental em aplicações de probabilidades, já o seu uso como base de uma teoria dedutiva levanta problemas. Numa experiência física, os números $n(A)$ e n *podem na realidade ser grandes, mas serão finitos; a sua razão pode, mesmo aproximadamente, ser igualada ao limite.*

Ao usar esta definição de $P(A)$, *o limite deve aceitar-se como uma hipótese e não como um número que pode ser determinado experimentalmente.*

DEFINIÇÃO 1.11

Definição Axiomática (Kolmogorov)

Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ *o espaço amostra associado a uma experiência aleatória. A função* $P(.)$ *definida em* $\mathcal{A}$ *e tendo o intervalo* $[0,1]$ *para contradomínio é chamada medida de probabilidade ou apenas probabilidade se satisfazer os axiomas seguintes:*

1. $P(A) > 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. *Se* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, *são incompatíveis dois a dois (isto é,* $A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall_{i \neq j}$*), então*

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right] = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

Chama-se a $P(A)$ *a probabilidade do acontecimento A.*

Esta definição consiste no melhor caminho para introduzir a teoria da probabilidade, realçando o carácter dedutivo da teoria, evitando ambiguidades de conceitos, fornecendo uma sólida preparação para aplicações sofisticadas.

DEFINIÇÃO 1.12 **(Espaço de Probabilidades)**

Ao termo ordenado $(\Omega, \mathcal{A}, P(.))$ *— com* $\Omega, \mathcal{A}, P(.)$ *definidos anteriormente — chamar-se-á Espaço de Probabilidades.*

Pode sempre associar-se um espaço de probabilidade a uma experiência aleatória. Ao fazê-lo está a construir-se um *modelo probabilístico* para essa experiência.

TEOREMA 1.4

$P(\varnothing) = 0.$

DEMONSTRAÇÃO

Fazendo $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \varnothing, \ldots,$ *pelo axioma 3,*

$$P(\varnothing) = P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(\varnothing)$$

A igualdade só se verifica se $P(\varnothing) = 0.$

TEOREMA 1.5

Se $A_1, \ldots, A_n$ *são acontecimentos incompatíveis em* $\mathcal{A}$, *então*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$$

DEMONSTRAÇÃO

Sejam

$$A_{n+1} = \varnothing,\ A_{n+2} = \varnothing,\ \ldots$$

Então

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in A$$

e

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right] = P\left[\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right] = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

TEOREMA 1.6

Se $A \in \mathcal{A}$, *então* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

DEMONSTRAÇÃO

$A \cup \overline{A} = \Omega$ e $A \cap \overline{A} = \varnothing$

então,

$$P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

Através do axioma 2, $P(\Omega) = 1$, *donde*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Esta igualdade traduz a relação fundamental entre acontecimentos complementares, de grande utilidade prática no cálculo de probabilidades.

TEOREMA 1.7

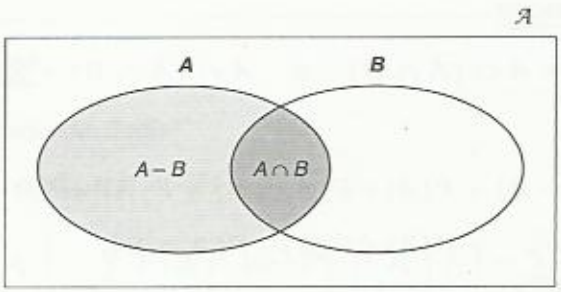
Se $A, B \in \mathcal{A}$, *então:*

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(A - B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B).$$

DEMONSTRAÇÃO

FIG.1.2



$$A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \quad e \quad (A \cap B) \cap (A \cap \overline{B}) = \varnothing$$

Pelo axioma 3:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

Por outro lado tem-se:

$$A = (A - B) \cup (A \cap B) \; e \; (A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

Novamente, pelo mesmo axioma:

$$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B),$$

donde

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B).$$

TEOREMA 1.8

$$\forall A, B \in \mathcal{A}, P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

e

$$P\left[\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right] = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{i<j}\sum P(A_i \cap A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<k}\sum\sum P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots\ldots +$$

$$+ (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right)$$

DEMONSTRAÇÃO

i) $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B) \quad e \quad A \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing.$

Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) + P(B - A) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

ii) $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B \cup C) - P[(A \cap (B \cup C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P[(A \cap B) \cup (A \cap C)] =$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$$
$$+ P(A \cap B \cap C).$$

A expressão geral prova-se através de indução matemática.

TEOREMA 1.9

Se $A, B \in \mathcal{A}$, *e* $A \subset B$, *então* $P(A) \leq P(B)$.

DEMONSTRAÇÃO

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \quad e \quad (A \cap B) = A;$$

então,

$$B = A \cup (B \cap \overline{A}), \text{ com } A \cap (B \cap \overline{A}) = \varnothing;$$

assim,

$$P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A});$$

mas sendo $P(B \cap \overline{A}) > 0$, *através do axioma* 1, *ter-se-ia:*

$$P(A) \leq P(B)$$

TEOREMA 1.10

(Desigualdade de Boole)

Se $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$, *então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) < \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \quad ou \quad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 1 - \sum_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

DEMONSTRAÇÃO

i) $n = 2$: $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$, *logo:*

$$P(A_1 \cup A_2) < P(A_1) + P(A_2),$$

pois que $P(A_1 \cap A_2) > 0$; *ou, então,*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) + 1 - P(\overline{A}_2) - P(A_1 \cup A_2) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) - P(\overline{A}_2) + 1 - P(A_1 \cup A_2) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1) - P(\overline{A}_2) + P(\overline{A_1 \cup A_2}), \end{aligned}$$

ou, seja, finalmente,

$$P(A_1 \cap A_2) > 1 - P(\overline{A}_1) - P(\overline{A}_2), \text{ pois } P(\overline{A_1 \cup A_2}) \geq 0.$$

ii) Por indução matemática prova-se o caso geral.

EXEMPLO 1.11

Um dado é lançado duas vezes. Seja A o acontecimento {soma das pintas obtidas nos dois lançamentos diferente de quatro}.

Calcule $P(A)$.

RESOLUÇÃO

Nesta experiência, como sabemos, ter-se-ia:

$$\Omega = \{(i,j) : i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

e, consequentemente, $\overline{A} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

Assim, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{3}{36} = \dfrac{33}{36}$.

■ EXEMPLO 1.12

Considere a experiência aleatória do exemplo anterior e considere os acontecimentos A e B, tais que:

A = { saída de um número de pintas, no primeiro lançamento não superior a 2 };

B = { saída de um número de pintas, no segundo lançamento, pelo menos igual a 5 }.

Qual a probabilidade de que se verifique A ou B?

RESOLUÇÃO

Agora, temos:

$$\Omega = \{(i,j): i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}: \#\Omega = 36,$$

$$A = \{(i,j): 1 \leq i \leq 2,\ j = 1,2,\ldots,6\}: \#A = 12 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{12}{36},$$

$$B = \{(i,j): 5 \leq i \leq 6,\ i = 1,2,\ldots,6\}: \#B = 12 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{12}{36},$$

$$A \cap B = \{(1,5), (1,6), (2,5), (2,6)\}: \#(A \cap B) = 4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{4}{36}.$$

Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{36} + \frac{12}{36} - \frac{4}{36} = \frac{5}{9}.$$

■ EXEMPLO 1.13

Sejam A e B os acontecimentos tais que:

$$P(A) + P(B) = x \quad e \quad P(A \cap B) = y.$$

Determine em função de x e y, a probabilidade de que:

a) Não se realize nenhum dos acontecimentos;

b) Se realize um e um só dos acontecimentos;

c) Se realize pelo menos um dos acontecimentos;

d) Se realize quanto muito um dos acontecimentos.

RESOLUÇÃO

a) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$= 1 - [P(A) + P(B)] + P(A \cap B) = 1 - x + y;$

b) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B),$

pois $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap B) = \varnothing.$

Assim,

$P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)] = P(A \cup B) - P(A \cap B) =$

$= x - y - y = x - 2y;$

c) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap B)] = P(A \cup B) = x - y;$

d) $P[(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})] = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - y.$

EXEMPLO 1.14

Considere um espaço de resultados constituído por N elementos A_i e por M elementos B_j. Os acontecimentos A_i são equiprováveis, o mesmo se passando com os acontecimentos B_j. Sabe-se, todavia, que $P(B_j) = 2P(A_i)$. *Se o acontecimento A for formado por n* acontecimentos A_i e por m acontecimentos B_j prove que:

$$P(A) = \frac{n + 2m}{N + 2M}$$

RESOLUÇÃO

$\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_N, B_1, B_2, \ldots, B_M\}: \#\Omega = N + M$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) + P\left(\bigcup_{j=1}^{M} B_j\right) = 1 \Rightarrow NP(A_i) + MP(B_j) = 1$$

Mas

$P(B_j) = 2P(A_i)$, pelo que: $NP(A_i) + 2MP(A_i) = 1$, *ou*

$$P(A_i) = \frac{1}{N + 2M} \quad \text{e} \quad P(B_j) = \frac{2}{N + 2M}$$

Sendo $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ *ter-se-á:*

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P\left(\bigcup_{j=1}^{m} B_j\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + \sum_{j=1}^{m} P(B_j) =$$

$$= nP(A_i) + mP(B_j) = n\frac{1}{N+2M} + m\frac{2}{N+2M} =$$

$$= \frac{n+2m}{N+2M}.$$

■ EXEMPLO 1.15

Três pessoas nasceram no mês de Abril. Qual a probabilidade de que pelo menos duas hajam nascido no mesmo dia?

RESOLUÇÃO 1

$\Omega = \{(\alpha, \beta, \gamma): \alpha, \beta, \gamma \in \{1, 2, ..., 30\}\}$

A = { uma qualquer das três pessoas nasça em Abril num determinado dia x},

$$P(A) = \frac{1}{30}.$$

P = { Pelo menos 2 pessoas nascerem no mesmo dia } =

= P { nasçam 2 pessoas no mesmo dia } + P { nasçam 3 pessoas no mesmo dia }.

$$= P\,[(A \cap A \cap \bar{A}) \cup (A \cap A \cap A)] =$$

$$= \frac{1}{30} \times \frac{1}{30} \times \frac{29}{30} \times \binom{30}{1} \times \binom{3}{2} + \frac{30}{30} \times \frac{1}{30} \times \frac{1}{30} = \frac{87}{900} + \frac{1}{900} =$$

$$= \frac{88}{900}$$

RESOLUÇÃO 2

Usando a relação entre acontecimentos complementares:

P = { pelo menos 2 pessoas nasceram no mesmo dia } =

= 1 − P { nasceram toda em dias diferentes } =

$$= 1 - \frac{30}{30} \times \frac{29}{30} \times \frac{28}{30} = \frac{88}{900}.$$

PROBLEMAS 1.3

1 Considere o lançamento ao ar de uma moeda perfeita duas vezes. Qual a probabilidade de se obter pelo menos uma Face.

2 Fazem-se dois lançamentos de um dado perfeito; determine a probabilidade de que:

a) Saia pelo menos uma face 4;

b) A soma das faces seja pelo menos 4.

3 Qual a probabilidade de acertar no totobola com 10000 apostas simples?

4 Suponha uma caixa com 10 bolas brancas e 5 azuis. Extraem-se ao acaso 4 sem reposição. Qual a probabilidade de quando muito duas serem azuis?

5 Existe uma caixa com 10 bolas brancas e 5 azuis. Extraem-se aleatoriamente 3. Qual a probabilidade de quando muito duas serem azuis?

a) Com reposição;

b) Sem reposição.

6 António, João e Manuel atiram ao alvo pela ordem alfabética dos seus nomes, sendo a probabilidade de cada um acertar no alvo, respectivamente, de 1/4, 1/3, 1/2. Determine a probabilidade de:

a) Cada um ser o primeiro a atingir o alvo no primeiro tiro;

b) O alvo ser atingido pelo primeiro tiro de cada um;

c) O alvo só ser atingido pelo João no segundo tiro.

7 Uma colecção de 100 programas de computador foi examinada para detectar erros de «sintaxe», «*input/output*» e de «outro tipo» diferente dos anteriores. Após o exame verificou-se que: 20 desses programas tinham erros de «sintaxe», 10 tinham erros de «*input/output*», 5 tinham erros de «outro tipo», 6 tinham erros de «sintaxe» e de «*input/output*», 3 tinham erros de «sintaxe» e de «outro tipo», 3 tinham erros de «*input/outputs*» e de «outro tipo» e 2 tinham os três tipos de erros considerados. Um programa é seleccionado ao acaso dessa colecção. Determine a probabilidade de que o programa seleccionado tenha pelo menos um destes três tipos de erros.

8 Um grupo de apostadores do totobola decidiu jogar as apostas possíveis contendo sete vitórias em casa, quatro empates e duas vitórias fora. Calcule a probabilidade desse grupo ganhar o totobola.

9 De um baralho de 40 cartas tiram-se ao acaso e simultaneamente 3 cartas. Calcule a probabilidade de:

a) Serem todas do mesmo naipe;

b) Sair um e só um rei;

c) Sair pelo menos um rei;

d) Sair um rei e uma dama.

10 Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento ao mesmo tempo de 2 dados perfeitos. Qual a probabilidade de:

a) Sair a face 3 num só dado;

b) Sair a face 3 pelo menos num dado;

c) Sair uma soma de faces parâmetros.

(*Nota*: Resolva o problema considerando os dados distinguíveis e indistinguíveis).

11 Considere um dado equipamento que é constituído por dez transistores, dos quais dois são defeituosos. Suponha que dois transistores são seleccionados ao acaso com reposição:

a) Escreva o espaço de resultados correspondente a esta experiência aleatória e respectivas probabilidades;

b) Responda às mesmas questões de *a)* mas agora considerando que não houve reposição;

c) Calcule as probabilidades dos seguintes acontecimentos considerando separadamente as hipóteses das questões *a)* e *b)*:

1. Sair um transistor defeituoso na 1ª tiragem;
2. Sair um transistor defeituoso na 2ª tiragem;
3. Sair pelo menos um transistor defeituoso;
4. Sair exactamente um transistor defeituoso.

12 Considere o lançamento de 3 dados perfeitos, sendo um branco, outro preto e outro verde. Determine as probabilidades de se obter uma soma de pontos igual a 10 e a 11, respectivamente.

13 Uma urna contém cinco bolas pretas e cinco brancas. Dois jogadores *A* e B tiram alternadamente e um de cada vez uma bola da urna. O jogador que tirar a primeira bola branca ganha a partida.

a) Considere a experiência aleatória associada a este jogo e escreva o correspondente espaço de resultados;

b) Calcule a probabilidade de cada jogador ganhar a partida sabendo que o jogador *A* é o primeiro a tirar a bola da urna.

14 Uma bolsa contém moedas de prata e de cobre em igual número. Extraem-se ao acaso e sem reposição, duas moedas. Calcule a probabilidade de que:

a) Uma e uma só moeda seja de prata;

b) Pelo menos uma moeda seja de cobre;

c) Saia uma moeda de prata na segunda tiragem.

15 Considere dois acontecimentos *A* e *B*, tais que:

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

a) *A* e *B* são incompatíveis?

b) Serão independentes?

16 De um baralho de 52 cartas extraem-se aleatoriamente 13 cartas sem reposição. Qual a probabilidade de se obter:

a) Exactamente 6 copas?

b) Pelo menos 2 ases?

4

PROBABILIDADE CONDICIONAL TEOREMA DE BAYES

Seja L_1 um lote com 100 transistores, 10 dos quais defeituosos e L_2 outro lote com l00 transistores, 15 dos quais defeituosos.

Selecciona-se aleatoriamente um lote — L_1 caso ocorra uma face ímpar e L_2 caso contrário, no lançamento de um dado não viciado — do qual, também ao acaso, se extrai um transistor, tendo-se verificado ser perfeito; qual a probabilidade dele ter sido extraído de L_1?

Existe, agora, uma nova informação (transistor perfeito) e o modo de usá-la ao fazer considerações relativas à ocorrência do outro acontecimento (selecção de L_1) é a questão que se coloca.

Antes não dispunhamos de informação deste tipo, acerca da experiência, mas tão somente o respectivo espaço amostra.

■ EXEMPLO 1.16

Considere o lançamento de duas moedas perfeitas. Sabemos que o respectivo espaço de resultados é $\Omega = \{(F, F), (F, C), (C, F), (C, C)\}$. Considere agora os seguintes acontecimentos:

A = { Ambas as moedas apresentam o mesmo resultado }

B = { Pelo menos numa das moedas ocorre C }

Claramente se teria $P(A) = P\{(F,F),(C,C)\} = \frac{2}{4}$.

Todavia contando com a informação da ocorrência de B para determinar a probabilidade de A, a informação sobre aquele garante-nos que não acontece (F, F). E assim,

$$P(A \text{ condicionada à informação da ocorrência de } B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

DEFINIÇÃO 1.13 **(Probabilidade condicional)**

Sendo A e B dois acontecimentos pertencentes ao espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P(.))$, *a probabilidade condicional dos acontecimentos A e B é definida por:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ se } P(B) > 0.$$

TEOREMA 1.11

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *um espaço de probabilidades e* $B \in \mathcal{A}$, *com* $P(B) > 0$. *Então* $(\Omega, \mathcal{A}, P(A|B))$ *é um espaço de probabilidades,* $\forall A$.

DEMONSTRAÇÃO

Para provar este teorema, necessário se torna indagar se $P(A|B)$ *verifica os três axiomas.*

i) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(B) > 0$.

Ora sendo $P(A \cap B) \geq 0$ *e* $P(B) > 0$, *ter-se-ia, necessariamente,* $P(A|B) \geq 0, \forall A$.

ii) $P(\Omega|B) = \dfrac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$, $P(B) > 0$.

iii) Sendo $A_1, A_2, \ldots$ *uma sequência de acontecimentos incompatíveis, dois a dois, em* $\mathcal{A}$, *então*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$$

e

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \,|\, B\right) = \frac{P\left[\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap B\right]}{P(B)} = \frac{P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_j \cap B)\right)}{P(B)} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \cap B)}{P(B)} = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j \,|\, B).$$

Fica, assim, provado que $P(A|B)$, com $P(B) > 0$, $\forall A \in \mathcal{A}$, é uma função de probabilidade, gozando das propriedades inerentes e, consequentemente, $(\Omega, \mathcal{A}, P(A|B))$ é um espaço de probabilidades, $\forall A \in \mathcal{A}$.

■ EXEMPLO 1.17

Em certa Universidade 60% dos alunos estudam Matemática, 20% estudam Física e 10% estudam Matemática e Física. Seleccionou-se aleatoriamente um aluno dessa Universidade e verificou-se que ele estuda Matemática. Qual a probabilidade dele estudar também Física?

RESOLUÇÃO

Sejam

F = { alunos que estudam Física }

e

M = { alunos que estudam Matemática };

então,

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{0{,}10}{0{,}60} = \frac{1}{6}$$

■ EXEMPLO 1.18

Considere uma mão de 5 cartas, num jogo de poker, e suponha que essas cartas foram extraídas aleatoriamente. Considere ainda os acontecimentos seguintes:

A = { pelo menos três cartas de espadas },

B = { todas as cartas de espadas }.

Qual a probabilidade de se verificar B condicionado à verificação de A?

RESOLUÇÃO

$P(A \cap B) = P(\text{todas as cartas de espadas})$

$$= \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}.$$

Então,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\dfrac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}}{\dfrac{\left[\binom{13}{3}\binom{39}{2} + \binom{13}{4}\binom{39}{1} + \binom{13}{5}\right]}{\binom{52}{5}}}.$$

TEOREMA 1.12

$P(\varnothing|B) = 0.$

TEOREMA 1.13

Se $A_1, ..., A_n$ são incompatíveis dois a dois em Ω, então:

$$P\{(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)|B\} = \sum_{j=1}^{n} P(A_j|B).$$

TEOREMA 1.14

Se $A \in \mathcal{A}$, então $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$

TEOREMA 1.15

Se $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, *então*

$$P(A_1|B) = P[(A_1 \cap A_2)|B] + P[(A_1 \cap \bar{A}_2)|B].$$

TEOREMA 1.16

$\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$,

$$P\{(A_1 \cup A_2)|B\} = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P[A_1 \cap A_2)|B].$$

TEOREMA 1.17

Se A_1 *e* $A_2 \in \mathcal{A}$ *e* $A_1 \subset A_2$, *então*

$$P(A_1|B) \leq P(A_2|B).$$

TEOREMA 1.18

Se $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$, *então*

$$P[(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|B] \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j|B).$$

TEOREMA 1.19

Se $A, B \in \mathcal{A}$, então

i) $P(A|A) = 1$

ii) $P(A|\overline{A}) = 0$

iii) Se $B \subset A \Rightarrow P(A|B) = 1$

As demonstrações resultam directamente das propriedades de $P(.)$.

DEFINIÇÃO 1.14 (Partição de Ω)

Diz-se que a classe de acontecimentos $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \in \mathcal{A}$ *é uma partição de* Ω *se forem verificadas as seguintes condições:*

i) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$

ii) $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$

iii) $P(A_i) > 0,\ j = 1,...,n$

Assim, para qualquer partição, finita ou infinita numerável, ter-se-á:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) = 1.$$

TEOREMA 1.20

Regra da multiplicação.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *um espaço de probabilidade e* $A_1, ..., A_k, ... \in \mathcal{A}$,

com $P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) > 0$.

Então:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\,P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\ldots P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)$$

DEMONSTRAÇÃO

Uma vez que:

$$\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) \subset \left(\bigcap_{j=1}^{n-2} A_j\right) \subset \ldots \subset (A_1 \cap A_2) \subset A_1,$$

através do teorema 1.17 tem-se que:

$$0 \leq P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \ldots \leq P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1).$$

Todas as probabilidades condicionadas envolvidas no teorema são definidas desde que sejam positivas todas as probabilidades dos acontecimentos condicionantes. A demonstração far-se-á por indução finita. Para $n = 1$ o teorema é válido uma vez que por definição, $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)$

Para n ter-se-ia:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) \cap A_n\right] = P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right)$$

Caso a relação seja válida para $n - 1$,

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j\right) = P(A_1)\,P(A_2 \mid A_1)\ldots P(A_{n-1} \mid A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_{n-2}),$$

é válida também para n.

TEOREMA 1.21

Teorema das Probabilidades Totais

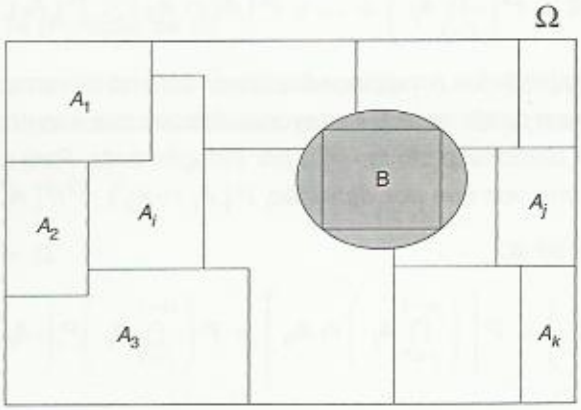
No espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *se* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *é uma partição de* Ω, *então,* $\forall B \in \mathcal{A}$,

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_k)P(B|A_k) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j).$$

DEMONSTRAÇÃO

FIG.1.3



(1) *Através da fig. 1.3 e tendo em vista que, pela própria definição de* Ω, *o acontecimento B não pode ocorrer isoladamente na experiência, ele terá que se verificar pelo menos com um dos* A_j.

Assim, ter-se-á:

(2) $B = \bigcup_{j=1}^{k} (B \cap A_j)$, *sendo que* $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \varnothing, \forall_{i \neq j}$

Assim:

$$P(B) = P(B \cap \Omega) = P\left[B \cap \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right)\right] = P\left[\bigcup_{j=1}^{k} (B \cap A_j)\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} P(B \cap A_j) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j).$$

TEOREMA 1.22

Teorema de Bayes.

Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ *é uma partição de* Ω, *então,* $\forall\ B \in \mathcal{A}$, *para o qual* $P(B) > 0$, *ter-se-á:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

DEMONSTRAÇÃO

Por definição,

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \tag{1.3}$$

e

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \tag{1.4}$$

Através do teorema 1.21,

$$P(B) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j). \tag{1.5}$$

De (1.4) *tem-se*

$$P(A_i \cap B) = P(A_i)P(B|A_i) \tag{1.6}$$

Por substituição de (1.5) *e* (1.6) *em* (1.3) *tem-se*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j)P(B|A_j)}.$$

■ EXEMPLO 1.19

Suponha duas caixas idênticas *I* e *II*, tais que:

I — contém 5 bolas vermelhas e 4 brancas;

II — contém 3 bolas vermelhas e 6 brancas.

Realizou-se uma experiência aleatória que consiste no seguinte:

1ª ETAPA: selecciona-se aleatoriamente uma caixa;

2ª ETAPA: da caixa seleccionada anteriormente, extrai-se, também ao acaso, uma bola.

Nestas condições determine:

a) A probabilidade da bola ser vermelha;

b) A probabilidade da bola ter sido extraída da caixa *II*, sabendo que é branca.

RESOLUÇÃO

Em primeiro lugar pode notar-se que o espaço de resultados associado é da forma:

$$\Omega = \{(\alpha,\beta): \alpha \in \{I,II\},\ \beta \in \{B,V\}\},$$

ou seja:

$$\Omega = \{(I,V),(I,B),(II,V),(II,B)\}$$

a) Sendo V = { Ocorrência de bola vermelha }, ter-se-ia:

$$P(V) = P(V \cap I) + P(V \cap II) = P(I)P(V|I) + P(II)P(V|II).$$

Tratando-se de duas caixas idênticas, ter-se-á

$$P(I) = P(II) = \frac{1}{2}$$

Assim,

$$P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{9} = \frac{8}{18}$$

b) Estamos interessados no cálculo da probabilidade:

$$P(II|B) = \frac{P(II)\ P(B|II)}{P(I)\ P(B|I) + P(II)\ P(B|II)}$$

Pois segundo o teorema 1.21,

$$P(B) = P(I)P(B|I) + P(II)P(B|II)$$
$$= 1 - P(V)$$

e

$$P(II|B) = \frac{P(II)P(B|II)}{1-P(V)} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{6}{9}}{1-\frac{8}{18}} = \frac{\frac{6}{18}}{\frac{10}{18}} = \frac{6}{10}$$

■ EXEMPLO 1.20

Registos efectuados levaram a concluir que os motoristas que circulam em determinada estrada podem cometer dois e só dois tipos de transgressões, ditas do tipo *I* e do tipo *II*, não se notando nenhum caso em que o motorista cometa ambas as transgressões.

De entre 500 motoristas multados, verificou-se serem 100 por transgressões do tipo *I*.

Sabe-se que 10% dos motoristas que cometem transgressões do tipo *I* são multados, 2% cometem transgressões do tipo *II* e 1% cometem transgressões do tipo *I*.

Calcule a probabilidade de que um motorista que circule nessa estrada e cometa uma transgressão do tipo *II*, seja multado.

RESOLUÇÃO

i) Do 1º parágrafo:

$$P(I \cap II) = 0$$

ii) Do 2º parágrafo:

$$P(I|M) = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

$$P(II|M) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

iii) Do 3º parágrafo:

$$P(M|I) = 0{,}10$$

$$P(I) = 0{,}01$$

$$P(II) = 0{,}02$$

Pretende-se calcular:

$$P(M|II) = \frac{P(M)P(II|M)}{P(II)}$$

Torna-se desnecessário usar o teorema 1.21 pois já conhecemos $P(II) = 0{,}02$. Apenas necessitamos de calcular $P(M)$. Todavia, por definição,

$$P(M|I) = \frac{P(M)P(I|M)}{P(I)}$$

Consequentemente,

$$0{,}10 = \frac{P(M) \times 0{,}2}{0{,}01} \Rightarrow P(M) = 0{,}005$$

Finalmente, ter-se-ia:

$$P(M|II) = \frac{0{,}005 \times 0{,}80}{0{,}02} = 0{,}2$$

PROBLEMAS 1.4

1 As equipas de basquetebol das universidades *A*, *B*, *C* e D vão disputar o campeonato universitário e têm, respectivamente, probabilidades de 0,2; 0,4; 0,3 e 0,1; de ganharem o campeonato. Supondo que a equipa *B* tem de desistir e não é substituída por nenhuma outra, qual a probabilidade de que a equipa *A* ganhe o campeonato?

2 Suponha que 5% da população portuguesa sofre de hipertensão e que de entre estes, 75% ingerem bebidas alcoólicas. De entre os que não são hipertensos, 50% ingerem bebidas alcoólicas.

a) Qual a percentagem de pessoas que bebem álcool?

b) Qual a percentagem de pessoas que bebendo álcool sofrem de hipertensão?

3 Suponha que em determinada Universidade os alunos se encontram assim repartidos, por alguns dos Cursos nela leccionados:

— 10% dos alunos estudam Gestão Hoteleira;

— 30% dos alunos estudam Direito;

— 20% dos alunos estudam Gestão;

— 8% dos alunos estudam Gestão e Direito.

a) Qual a probabilidade de um aluno seleccionado ao acaso não estude Gestão?

b) Um aluno seleccionado ao acaso estuda Direito; qual a probabilidade de que estude também Gestão?

c) Os acontecimentos Direito e Gestão são independentes?

4 Suponha que a documentação de uma empresa está assim repartida:

Secretária	Papel Arquivado	Erro
Ana	20 %	2 %
Bela	50 %	2 %
Clara	30 %	3 %

Verificou-se a determinada altura que é cometido um erro de arquivo. Qual a probabilidade do erro ter sido cometido pela Bela.

5 Nos parques industriais *A*, *B* e *C*, respectivamente, 10%, 40% e 25% das empresas dedicam-se à actividade têxtil. Escolhido ao acaso um parque e nele, também ao acaso, uma empresa, qual a probabilidade de que a empresa seja têxtil?

Sabendo que a empresa não se dedica à actividade têxtil, qual a probabilidade de que seja do parque *B*?

6 Suponha duas caixas idênticas I e II com a seguinte composição:

Caixa I — cinco bolas vermelhas e quatro bolas brancas:;

Caixa II — três bolas vermelhas e seis bolas brancas.

Realizou-se uma experiência com o seguinte procedimento:

1. Selecciona-se aleatoriamente uma das caixas;
2. Da caixa seleccionada anteriormente extrai-se aleatoriamente uma bola.

a) Qual a probabilidade da bola ser vermelha?

b) Verificou-se que a bola era branca. Qual a probabilidade de que ela tenha sido extraída da caixa II?

7 Em determinada população existem 60% de mulheres das quais 6% têm mais de 170 cm de altura e existem 40% de homens dos quais 2% têm mais de 170 cm de altura. Seleccionou-se uma pessoa dessa população e verificou-se que tinha mais de 170 cm de altura. Qual a probabilidade de ser mulher?

8 Um indivíduo tem à sua disposição somente três meios de transporte diferentes para se deslocar de casa para o emprego.

Sabe-se que a probabilidade de:

— chegar a horas ao emprego é 0,4;

— chegar atrasado utilizando *A* é 0,8;

— chegar atrasado utilizando B é 0,5;

— chegar atrasado utilizando C é 0,6;

— utilizar B e C é a mesma.

Calcule a probabilidade de que o indivíduo utilize A.

9 Um teste é constituído por uma pergunta com n alternativas. O indivíduo que o faz ou conhece a resposta ou responde ao acaso. Seja p a probabilidade de o indivíduo conhecer a resposta. Admitindo que a probabilidade de um indivíduo responder correctamente à questão dado que conhece a resposta é 1 e que a probabilidade de responder correctamente dado que responde ao acaso é $1/n$,

a) Verifique que a probabilidade de um indivíduo não ter respondido ao acaso dado que respondeu correctamente é, $\dfrac{np}{1+(np-1)p}$.

b) Supondo $n = 5$ e $p = 0{,}2$, *calcule a probabilidade de que uma pessoa escolhida ao caso não responda correctamente à questão.*

10 Suponha que um departamento tem três terminais que podem ser ligados a um computador através de duas linhas de comunicação. O terminal 1 tem a sua linha própria, enquanto os terminais 2 e 3 partilham uma linha, de modo que quando um está a funcionar o outro não o pode fazer. Durante um dia o terminal 1 funciona (em média) trinta minutos em cada hora, o terminal 2 dez minutos em cada hora e o terminal 3 cinco minutos em cada hora.

a) Considerando que as linhas operam independentemente qual é a probabilidade de que pelo menos um terminal esteja em funcionamento?

b) Considere agora que o funcionamento das linhas não é independente. A probabilidade condicionada de que o terminal 2 esteja em funcionamento dado que o terminal 1 está em funcionamento, é de 1/3 e a probabilidade condicionada correspondente para o terminal 3 é igual a 1/12. Nestas condições responda à questão da alínea a).

11 Suponha que se têm duas caixas A e B em que:

A: Contém duas bolas pretas e uma bola branca;

B: Contém duas bolas pretas e duas bolas brancas.

Considere uma experiência composta pelas seguintes fases:

1. Escolha de uma caixa ao acaso;
2. Transferência de uma bola escolhida ao acaso da caixa escolhida na 1ª fase para a outra caixa;
3. Extracção de uma bola desta segunda caixa.

a) Defina o espaço de resultados e probabilize esse espaço.

b) Determine a probabilidade de transferir uma bola preta e retirar uma bola branca.

c) Suponha que se retira uma bola branca na 3ª fase; qual a probabilidade de ter sido escolhida a caixa *A* na 1ª fase?

12 Na sequência de um inquérito feito às pessoas de uma certa região para saber o nível de audiência das três estações de rádio locais (*A*, *B*, *C*), estimou-se que:

28 % ouvem *A*;	10 % ouvem *A* e *B*;
21 % ouvem *B*;	6 % ouvem *A* e *C*;
15 % ouvem *C*;	5 % ouvem *B* e *C*;
2 % ouvem as três estações	

a) Calcule a probabilidade duma pessoa ouvir pelo menos uma estação;

b) Das pessoas que ouvem pelo menos uma estação, qual a percentagem que ouve *A* e *B*?

c) Se uma pessoa declara que não ouve *B*, qual a probabilidade de ouvir *A* ou *C*?

d) Caso a pessoa declare que ouve *B*, qual a probabilidade de ouvir *A* ou *C*?

13 Um instrumento de medição incorpora três componentes electrónicas, com fiabilidade de respectivamente, 0,85; 0,9 e 0,95.

Se nenhuma das componentes está avariada o sistema funciona sempre; se uma das componentes está avariada, a probabilidade do sistema trabalhar é 0,8; se duas ou mais componentes estão avariadas o sistema não funciona. Admita que as componentes funcionam independentemente umas das outras.

a) Determine a probabilidade do sistema funcionar.

b) Sabendo que o sistema está a funcionar, determine a probabilidade de existir uma componente avariada no sistema.

14 Num Centro Comercial existem três telefones públicos, colocados estrategicamente a fim de satisfazer adequadamente os utentes.

Da observação prolongada do funcionamento dos telefones concluiu-se que as probabilidades dos três telefones, T_1 , T_2 e T_3 , se encontrarem avariados são 0,15; 0,20 e 0,25, respectivamente e que as avarias são independentes.

a) Sabendo que ao observar os três telefones foram detectados dois com avarias, calcule a probabilidade de se ter avariado o T_1.

b) O grupo de telefones satisfaz minimamente o serviço na respectiva zona se pelo menos dois estão sem avarias. Qual a probabilidade de que pelo

menos dois desses telefones estejam em funcionamento? Acha que a zona está bem servida de telefones? Justifique a resposta.

c) Qual a probabilidade de pelo menos um dos três telefones estar avariado?

5

INDEPENDÊNCIA DE ACONTECIMENTOS

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidades e considerem-se dois acontecimentos A e $B \in \mathcal{A}$, com $P(B) > 0$. A regra da multiplicação diz-nos que:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B).$$

Acontece, porém, em muitas experiências, que a informação fornecida pelo acontecimento B não afecta a probabilidade do acontecimento A e, consequentemente,

$$P(A|B) = P(A).$$

■ EXEMPLO 1.21

Considere o lançamento de dois dados perfeitos e os acontecimentos A e B tais, que:

A = { ocorrência de número ímpar de pontos no 1º dado }

B = { ocorrência de número par de pontos no 2º dado }.

Neste caso:

$$\Omega = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \{1, 2, ..., 6\}\}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4},$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A)$$

Na realidade o resultado obtido no lançamento do 1º dado não influencia o resultado obtido no lançamento do 2º dado: — Os acontecimentos A e B são, pois, independentes.

■ EXEMPLO 1.22

Considere o lançamento ao ar de duas moedas perfeitas e os acontecimentos A e B, tais que:

A = { Face no 2º lançamento }

B = { Face no 1º lançamento }

Ter-se-á, agora:

$$\Omega = \{(F, F), (F, C), (C, F), (C, C)\},$$

e, consequentemente,

$$P(A) = P\{(F, F), (C, F)\} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = P\{(F, F), (F, C)\} = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B) = P\{(F, F)\} = \frac{1}{4},$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A).$$

Uma vez mais a informação sobre B não influencia a probabilidade de A. A e B são independentes.

DEFINIÇÃO 1.15 **(Independência)**

Sendo A, $B \in \mathcal{A}$, num espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eles dizem-se independentes se e só se:

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B).$$

Esta definição é válida sem restrições em $P(A)$ ou $P(B)$. Contrariamente à probabilidade condicional, a independência é definida mesmo com $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Assim, sendo $P(A) = 0$, o acontecimento A é independente de todo o acontecimento $B \in \mathcal{A}$ com $P(B) > 0$. Mais, qualquer acontecimento $A \in \mathcal{A}$, com $P(A) > 0$, é independente dos acontecimentos $\varnothing$ e Ω.

TEOREMA 1.23

Se $A, B \in \mathcal{A}$, num espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ são independentes, então

$$P(B|A) = P(B), \text{ se } P(A) > 0$$
$$P(A|B) = P(A), \text{ se } P(B) > 0$$

A demonstração é imediata, conjugando as definições 1.13 e 1.15.

TEOREMA 1.24

Se $A, B \in \mathcal{A}$, num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ são independentes, também o serão A e $\overline{B}$, $\overline{A}$ e B e $\overline{A}$ e $\overline{B}$.

DEMONSTRAÇÃO

i) A independente de $\overline{B}$:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A - B) =$$
$$= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) =$$
$$= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\overline{B}).$$

logo, A e $\overline{B}$ são independentes.

ii) $\overline{A}$ independente de B:

Demonstração análoga.

iii) $\overline{A}$ *independente de* $\overline{B}$*:*

Tem-se pelo teorema 1.8,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) - P(A)P(B) =$$
$$= 1 - P(\overline{A}) + 1 - P(\overline{B}) - 1 - P(\overline{A})1 - P(\overline{B}) =$$
$$= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B}),$$

ou seja: $P(\overline{A})\,P(\overline{B}) = 1 - P(A \cup B) = P[(\overline{A \cup B})] =$

$$= P(\overline{A} \cap \overline{B}).$$

■ EXEMPLO 1.23

Ao proceder a 2 lançamentos de uma moeda, obtém-se como já vimos no exemplo 1.22,

$$\Omega = \{(F, F), (F, C), (C, F), (C, C)\}.$$

Sejam a e b dois números positivos tais que $a + b = 1$ *e*

$$P\{(F, F)\} = a^2, \quad P\{(C, F)\} = P\{(F, C)\} = ab, \quad P\{(C, C)\} = b^2.$$

Estas probabilidades são consistentes com os axiomas, pois que a sua soma é igual a 1:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)^2 = 1.$$

Na experiência assim constituída, os acontecimentos:

B = {Face no 2º lançamento} = $\{(F, F), (C, F)\}$

A = {Face no 1º lançamento} = $\{(F, F), (F, C)\}$

têm as probabilidades seguintes:

$$P(B) = P\{(F, F)\} + P\{(C, F)\} = a^2 + ab = a(a + b) = a$$

$$P(A) = P\{(F, F)\} + P\{(F, C)\} = a^2 + ab = a(a + b) = a.$$

Quanto à intercepção, ter-se-á:

$$P(A \cap B) = P\{(F, F)\} = a^2 = P(A)P(B).$$

Ora este resultado mostra que os acontecimentos A e B são independentes.

EXEMPLO 1.24

Considerem-se famílias com dois filhos e assuma-se consequentemente, ser

$\Omega = \{(R,R),(R,M),(M,R),(M,M)\}$ onde

R = Rapaz e M = Menina, com $P(R) = P(M)$.

Seleccionou-se aleatoriamente uma família e considere os acontecimentos:

A = { Pelo menos uma menina nessa família }

B = { Filhos de ambos os sexos, nessa família }.

Estude a sua independência.

RESOLUÇÃO

Ter-se-á, nesta situação:

$$P(A) = P\{(R,M),(M,R),(M,M)\} = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = P\{(M,R),(R,M)\} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P\{(M,R),(R,M)\} = P(B) = \frac{1}{2}$$

uma vez que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, consideramos que A e B são acontecimentos dependentes.

Independência e incompatibilidade entre acontecimentos não devem ser objecto de confusão, porquanto traduzem relações diferentes. Note-se, pois, que se dois acontecimentos A e B, tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, são *incompatíveis*, eles serão imediatamente *dependentes*, por definição.

Identicamente, se A e B são *independentes*, com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então A e B *não podem ser incompatíveis*.

DEFINIÇÃO 1.16 **(Independência completa)**

Uma família de acontecimentos, $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, U, diz-se uma família mutuamente ou completamente independente, se e só se para qualquer subcolecção finita $\{A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{ik}\}$ de U, se verificar:

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{ij}).$$

Assim, para verificar a independência entre os acontecimentos, $A_1, A_2, ..., A_n \in A$, *devem verificar-se as relações seguintes:*

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j), \forall_{i \neq j}; i, j = 1, 2, ..., n$$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k), \forall_{i \neq j \neq k}; \; i, j, k = 1, 2, ..., n$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$$

PROBLEMAS 1.5

1 Sejam A e $B \in \Omega$, tais que $P(A) = 0{,}5$ e $P(A \cup B) = 0{,}7$. *Determine* $P(B)$, *sendo A e B independentes.*

2 Sejam A e $B \in \Omega$, dois acontecimentos de probabilidade não nula. Averigue se A e B podem ser:

a) Independentes;

b) Independentes e incompatíveis.

3 Numa caixa estão quatro pedaços de papel, de idêntico tamanho. Cada pedaço de papel tem um dos seguintes números inscritos:

110 101 011 e 000.

Escolhe-se um papel ao acaso e consideram-se os acontecimentos:

A_1 = { No papel escolhido o número 1 aparece em primeiro lugar }

A_2 = { No papel escolhido o número 1 aparece em segundo lugar }

A_3 = { No papel escolhido o número 1 aparece em terceiro lugar }

Averigue se são independentes os acontecimentos:

a) A_1 e A_2 ou A_1 e A_3 ou A_2 e A_3;

b) A_1 A_2 e A_3.

4 Sendo A e B acontecimentos tais que

$$P(A \cup B) = x \quad \text{e} \quad P(A) = P(B) = 0{,}5x + 0{,}125$$

e supondo que A e B são independentes, calcule o valor máximo de $P(A - B)$.

5 Um júri pretende ordenar três marcas de café, X, Y e Z, de acordo com o paladar. Definem-se os acontecimentos:

A = { Marca X é preferível a Y };

B = { Marca X é ordenada em primeiro (melhor)};

C = { Marca X é ordenada em segundo };

D = { Marca X é ordenada em terceiro }.

Se o júri não tiver experiência no que respeita ao paladar, e, em consequência, atribuir ordens às marcas através de um método aleatório será o acontecimento A independente dos acontecimentos B, C e D?