Investigação Operacional | 21076

Resolução do E-Fólio A

(1 val.) **1.** Uma Associação de Proteção Animal é responsável por 530 cães, dos quais 50 são de porte Grande (G), 120 de porte Médio (M) e 360 de porte Pequeno (P).

O Abrigo "Chão dos Bichos" tem capacidade para albergar 400 dos cães ao cuidado da Associação, os quais serão alimentados por uma mistura de 3 tipos de ração (A, B e C), cujas disponibilidades semanais, em Kg, por cão, são indicadas na tabela abaixo, consoante o porte do animal (G, M e P). Na última coluna da tabela, encontramos ainda o custo semanal, em €, dispendido por cão em alimentação de acordo com o seu porte.

	Tipos de Ração (quantidade semanal/cão)			
Porte	A	B	C	**Custo semanal/cão**
G	2 Kg	0,5 Kg	1 Kg	100 €
M	0 Kg	0,5 Kg	1,5 Kg	50 €
P	0,5 Kg	0,5 Kg	0,5 Kg	25 €

Sabe-se que as quantidades totais de rações tipo A e C disponíveis semanalmente são de 260 Kg e 290 Kg, respetivamente, e que, para a ração de tipo B, a quantidade disponibilizada para os cães de portes G e M deve ser pelo menos $\frac{1}{9}$ da quantidade reservada para os cães de porte P.

O plano da Associação é distribuir os seus cães destinados a ocupar o Abrigo, de tal forma que os custos totais dispendidos numa semana sejam mínimos.

(0,3 val.) **a)** Escreva, justificando, o Programa Linear que modela o plano ótimo da distribuição dos cães da Associação no Abrigo.

Resolução:

Sejam X_G, X_M e X_P as variáveis que representam o número de cães da Associação de portes G, M e P, respetivamente, a irem para o Abrigo.

Comecemos por estabelecer a função objetivo do Programa Linear, isto é, a função custo total semanal, que se pretende minimizar.

Com efeito, de acordo com a tabela enunciada, sendo o custo semanal associado a cada cão de porte G, M e P dado por 100 €, 50 € e 25 €, respetivamente, então a função custo total semanal F, é dada por:

$$F = 100\, X_G + 50\, X_M + 25\, X_p$$

Estabeleçam-se agora as condições de restrição do Programa Linear.

Com efeito, para as rações de tipo A e C, tendo em conta as quantidades semanais disponibilizadas para cada cão de cada um dos portes G, M e P na tabela enunciada, e as quantidades totais semanais disponibilizadas de 260 Kg e 290 Kg, respetivamente, deverá verificar-se:

$$\text{Quantidade total de ração } A = 2\, X_G + \ 0\, X_M \ + 0{,}5\, X_P \ \leq \ 260$$

$$\text{Quantidade total de ração } C = 1\, X_G + 1{,}5\, X_M + 0{,}5\, X_P \ \leq \ 290$$

Por outro lado, para a ração de tipo B, a quantidade total semanal disponibilizada para os cães de portes G e M, $0{,}5\, X_G + 0{,}5\, X_M$, deve ser pelo menos $1/9$ da quantidade total semanal reservada para os cães de porte P, $0{,}5\, X_P$, isto é,

$$0{,}5\, X_G + 0{,}5\, X_M \ \geq \ \frac{1}{9} \times 0{,}5\, X_P \quad \Leftrightarrow \quad X_G + X_M \ \geq \ \frac{1}{9}\, X_P$$

Resta estabelecer as restrições relativas ao número de cães de portes G, M e P.

Com efeito, como 400 cães da Associação vão para o Abrigo, temos

$$X_G + X_M + X_P = 400.$$

Por outro lado, tendo em conta que a Associação tem 50 cães de porte G, 120 cães de porte M e 360 cães de porte P, então

$$X_G \leq 50 \quad ; \quad X_M \leq 120 \quad \text{e} \quad X_P \leq 360$$

Por fim, há que ainda adicionar que X_G, X_M e X_P só podem tomar valores no conjunto dos inteiros não negativos, $\mathbb{N}_0$.

Reunida toda a informação requerida (função objetivo e condições de restrição), obtemos então o Programa Linear Inteiro:

Min $F = 100\,X_G + 50\,X_M + 25\,X_p$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcll} 2\,X_G + 0{,}5\,X_P & \leq & 260 & [1] \\ X_G + 1{,}5\,X_M + 0{,}5\,X_P & \leq & 290 & [2] \\ X_G + X_M & \geq & \dfrac{1}{9}\,X_P & [3] \\ X_G + X_M + X_P & = & 400 & \\ X_G & \leq & 50 & \\ X_M & \leq & 120 & \\ X_P & \leq & 360 & \\ X_G, X_M, X_P & \in & \mathbb{N}_0 & \end{array}$$

(0,4 val.) **b)** Recorrendo ao Método Gráfico, resolva o problema, verificando que a solução ótima existe e é única.

Identifique-a e calcule o custo mínimo associado.

Resolução:

Para recorrer ao Método Gráfico, há que reduzir o Programa Linear Inteiro a 2 variáveis de decisão. Para tal, basta representar uma das variáveis de decisão em função das outras duas, o que pode ser feito a partir da condição de restrição $X_G + X_M + X_P = 400$.

Com efeito, escolhendo eliminar a variável X_P, temos

$$X_P = 400 - X_G - X_M$$

e portanto podemos reescrever a função objetivo e as condições de restrição [1], [2] e [3] do Programa Linear estabelecido em a) do seguinte modo:

Função Objetivo:

$$F = 100\,X_G + 50\,X_M + 25\,(400 - X_G - X_M) = 75\,X_G + 25\,X_M + 10000$$

Condições de restrição:

[1] :

$$2\,X_G + 0{,}5\,(400 - X_G - X_M) \;\leq\; 260 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; 1{,}5\,X_G - 0{,}5\,X_M \;\leq\; 60 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; 3\,X_G - X_M \;\leq\; 120$$
$$\Leftrightarrow\;\; X_M \;\geq\; 3\,X_G - 120$$

[2] :

$$X_G + 1{,}5\,X_M + 0{,}5\,(400 - X_G - X_M) \;\leq\; 290 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; 0{,}5\,X_G + X_M \;\leq\; 90 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; X_M \;\leq\; -\,0{,}5\,X_G + 90$$

[3] :

$$X_G + X_M \;\geq\; \frac{1}{9}\,(400 - X_G - X_M) \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; \frac{10}{9}\,(X_G + X_M) \;\geq\; \frac{400}{9} \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; X_G + X_M \;\geq\; 40 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\;\; X_M \;\geq\; 40 - X_G$$

Deste modo, podemos reescrever o Programa Linear Inteiro do seguinte modo:

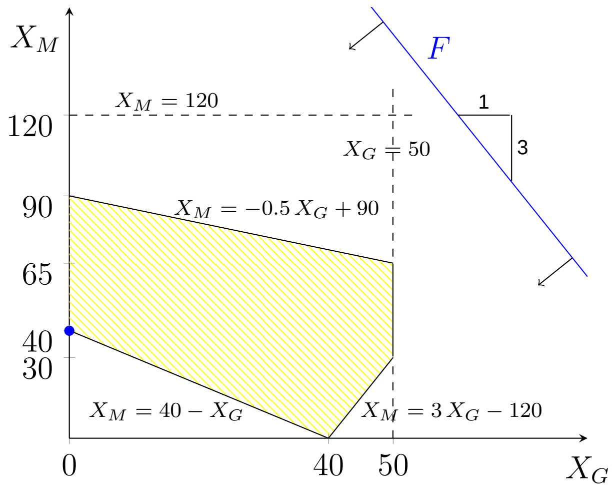
Min $F = 75\,X_G \,+\, 25\,X_M \,+\, 10000$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} X_M & \geq & 3\,X_G - 120 \\ X_M & \leq & -\,0{,}5\,X_G + 90 \\ X_M & \geq & 40 - X_G \\ X_G & \leq & 50 \\ X_M & \leq & 120 \\ X_G, X_M & \in & \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Para resolver o problema pelo Método Gráfico, há que representar a região admissível e a reta associada à função objetivo no plano, considerando o referencial cartesiano com eixo das abcissas associado a X_G e eixo das ordenadas associado a X_M.

Com efeito,



Notemos acima que, rigorosamente, a região admissível corresponde aos pontos de coordenadas inteiras na região sombreada a amarelo. Além disso, as retas indicadas a tracejado marcam o limite máximo dos valores inteiros que X_G e X_M podem tomar, 50 e 120, respetivamente.

Por outro lado, a reta associada à função objetivo, indicada a azul, tem declive -3, pois

$$F = 75\,X_G + 25\,X_M + 10000 \quad \Leftrightarrow \quad X_M = \frac{F - 10000}{25} - 3\,X_G$$

Uma vez que os coeficientes da função objetivo são positivos em X_G e X_M, então F decresce quando X_G e X_M decrescem, de acordo com o sentido indicado pelas setas na figura, segundo o qual a reta associada a F se irá deslocar. Deste modo, o último ponto da região admissível a ser tocado pela reta associada a F no deslocamento referido é $(0{,}40)$ (ponto assinalado a azul), que tem ambas as coordenadas inteiras e, portanto, pertence à região admissível.

Nessas condições, o custo mínimo associado é de:

$$F^* = 75 \times 0 + 25 \times 40 + 10000 = 11000\,€$$

Assim, a solução ótima do problema é única e dada por

$$X_G^* = 0 \quad ; \quad X_M^* = 40 \quad \text{e} \quad X_P^* = 400 - 0 - 40 = 360$$

Concluímos então que o custo mínimo de distribuição dos cães da Associação é de 11000 €, e que este ocorre quando nenhum cão da Associação de porte G vai para o Abrigo, $X_G^* = 0$, e são escolhidos 40 cães de porte M, $X_M^* = 40$, e todos os cães de porte P, $X_P^* = 360$.

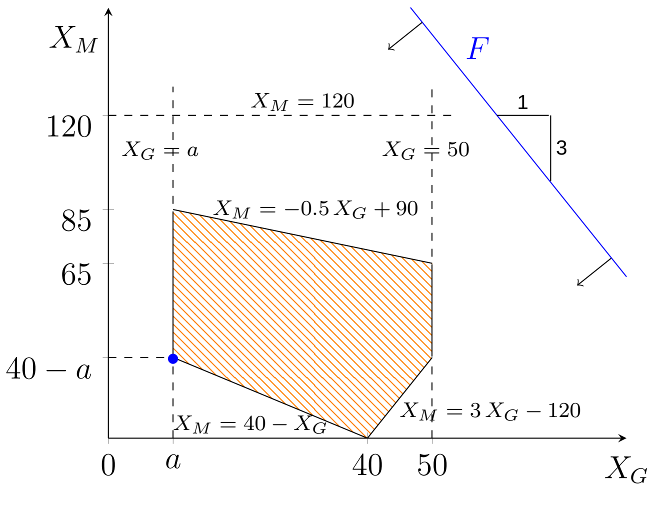
(0,15 val.) **c)** Adicione, justificando, uma condição de restrição ao problema original, por forma a obter uma solução ótima única diferente da deduzida em b).

Para o novo programa linear obtido, identifique a nova solução ótima e calcule o custo mínimo associado.

Resolução:

Para obter uma solução ótima única e diferente da do problema original, podemos adicionar uma condição de restrição que imponha que algum cão da Associação de porte G vá para o Abrigo, já que na solução ótima de b) tal não acontecia.

Para o efeito, a partir da região admissível a 2 variáveis, X_G e X_M, estabelecida em b), se adicionarmos uma condição de restrição do tipo $X_G \geq a$, com $a \in \{1, \ldots, 39\}$, o deslocamento da reta associada a F, que se mantém inalterada, na nova região admissível, de acordo com o mesmo sentido estabelecido em b), permite concluir que $(a,\, 40 - a)$ é o último ponto a ser tocado por F, como a figura abaixo mostra.



No caso de a ser um inteiro positivo, $40 - a$ também o é, e portanto, o ponto $(a, 40 - a)$ pertence à nova região admissível, assinalada a laranja, por ser um ponto de coordenadas inteiras. Por ser também o último ponto a ser tocado pela reta associada à função objetivo F no seu deslocamento, $(a, 40-a)$ é solução ótima única do novo problema.

Tomando, por exemplo, $a = 10$, temos

$$X_G^* = 10 \quad \text{e} \quad X_M^* = 40 - 10 = 30$$

e valor ótimo associado de

$$F^* = 75\, X_G^* + 25\, X_M^* + 10000 = 75\times 10 + 25\times 30 + 10000 = 11500\,€ \ ,$$

de acordo com a expressão da função objetivo a 2 variáveis de decisão estabelecida em b).

Deste modo, a adição da condição de restrição $X_G \geq 10$ ao programa inicial, origina um novo Programa Linear Inteiro com solução ótima única:

$$X_G^* = 10 \quad ; \quad X_M^* = 30 \quad \text{e} \quad X_P^* = 400 - X_G^* - X_M^* = 360 \ ,$$

que é diferente da solução ótima única original.

Concluímos então que, ao impor adicionalmente que pelo menos 10 cães de porte G da Associação devem ir para o Abrigo, o plano ótimo de distribuição passa por escolher o mínimo exigível de cães de porte G, $X_G^* = 10$, 30 cães de porte M, $X_M^* = 30$, e todos os cães de porte P, $X_P^* = 360$, da Associação, com um custo mínimo de $11500\,€$.

Como esperado, o custo mínimo associado à nova solução ótima não é inferior ao custo mínimo obtido em b), $11000\,€$, já que a nova região admissível está contida na original.

(0,15 val.) **d)** Altere, justificando, o custo semanal/cão de um dos portes, G, M ou P, no problema original, por forma a obter mais do que uma solução ótima possível.

Identifique as novas soluções ótimas e calcule o custo mínimo associado.

Resolução:

Ao alterar o custo semanal/cão de um dos portes G, M ou P, a nova função objetivo é diferente da original. Contudo, a região admissível original, estabelecida em b), mantém-se.

Escolhendo o custo semanal/cão associado ao porte G para alterar, designemos por c, $c > 0$, o seu valor. Nessas condições, recordando que $X_p = 400 - X_G - X_M$, obtemos:

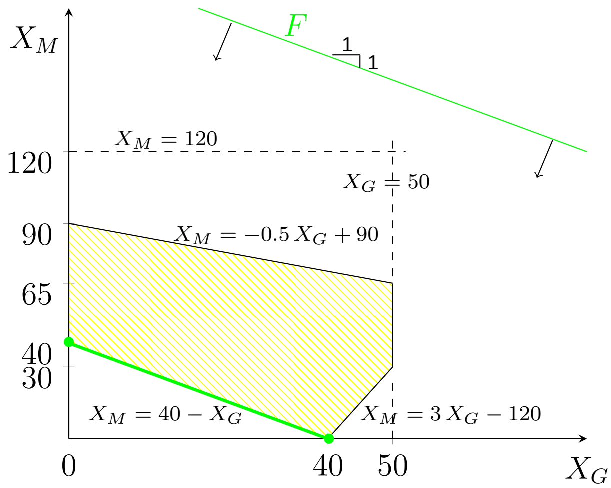
$$F \;=\; c\,X_G + 50\,X_M + 25\,X_p \;=\; (c-25)\,X_G + 25\,X_M + 10000.$$

Deste modo, $X_M = \dfrac{F-10000}{25} - \dfrac{c-25}{25}\,X_G$, e, portanto, temos

$$m_F = -\,\frac{c-25}{25}\ , \quad c > 0.$$

Notando que $m_F < 0$ e que o sentido da minimização de F é o da diminuição de X_G e de X_M, importa que, no deslocamento da reta associada a F, mais do que um ponto da região admissível seja tocado em último lugar. Tal ocorre, por exemplo, se o declive da reta for igual ao da reta de equação $X_M = 40 - X_G$, que é -1.

Com efeito, o gráfico abaixo mostra que a referida reta, assinalada a verde, quando se desloca no sentido de minimização de F (sentido das setas), irá intersetar em último lugar os pontos de coordenadas inteiras do segmento de reta, $X_M = 40 - X_G$, $0 \leq X_G \leq 40$.



Deste modo, podemos tomar c, tal que

$$m_F = -1 \;\Leftrightarrow\; -\,\frac{c-25}{25} = -1 \;\Leftrightarrow\; c = 50\ ,$$

isto é, alterar o custo semanal/cão de porte G para 50 €.

Nessas condições, as novas soluções ótimas correspondem aos pontos $(b, 40-b)$, $b \in \{0, \ldots, 40\}$, da região admissível.

Como a nova função objetivo associada ao problema tem expressão:

$$F = 25\,X_G + 25\,X_M + 10000\ ,$$

o custo mínimo associado à nova solução ótima é dado por:

$$F^* = 25 \times b + 25 \times (40 - b) + 10000 = 11000\,€$$

Concluímos então que, para obter mais do que uma solução ótima para o problema original, podemos alterar o custo semanal/cão de porte G para $50\,€$, resultando 41 soluções ótimas possíveis para o problema, que, para $b \in \{0, \ldots, 40\}$, são dadas por:

$$X_G^* = b \quad ; \quad X_M^* = 40 - b \quad \text{e} \quad X_P^* = 400 - X_G^* - X_M^* = 360\ ,$$

ou seja, para qualquer $b \in \{0, \ldots, 40\}$, podemos escolher b cães de porte G, $40 - b$ cães de porte M e todos os cães de porte P da Associação para irem para o Abrigo, com um custo mínimo associado de $11000\,€$.

(1,5 val.) **2.** Considere o Programa Linear:

Max $F = \theta\,X + Y\ , \quad \theta \in \mathbb{R}$.

sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} Y - 2\,X & \leq & 1 \\ Y - \frac{1}{2}X & \leq & 7 \\ X, Y & \geq & 0 \end{array}$$

(0,3 val.) **a)** Considere $\theta > -\frac{1}{2}$.
Recorrendo ao Método Gráfico, resolva o Programa Linear, identificando as soluções ótimas e calculando o valor ótimo associado, em caso de existência.

Resolução:

Para resolver o problema pelo Método Gráfico, há que representar a região admissível e a reta associada à função objetivo no plano, considerando o referencial cartesiano XoY.

Com efeito, podemos reescrever as condições de restrição do Programa Linear obtendo:

Max $F = \theta\, X + Y \;, \quad \theta \in \mathbb{R}$.

sujeito a:

$$\begin{aligned} Y &\leq 1 + 2\,X \\ Y &\leq 7 + \frac{1}{2}X \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

A região admissível resulta da interseção das regiões abaixo das retas $Y = 1 + 2\,X$ e $Y = 7 + \frac{1}{2}\,X$, que estejam incluídas no 1º Quadrante e eixos que o limitam $(X{,}Y \geq 0)$.

Verificamos ainda que as retas $Y = 1 + 2\,X$ e $Y = 7 + \frac{1}{2}\,X$ se intersetam no ponto $(4{,}9)$, pois:

$$\begin{cases} Y = 1 + 2\,X \\ Y = 7 + \frac{1}{2}\,X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \frac{1}{2}\,X = 1 + 2\,X \\ Y = 7 + \frac{1}{2}\,X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 9 \end{cases}$$

Por outro lado, temos

$$F = \theta\, X + Y \quad \Leftrightarrow \quad Y = F - \theta\, X$$

o que significa que o declive da reta associada à função objetivo, m_F, é $-\theta$.

Uma vez que, por hipótese, $\theta > -\dfrac{1}{2}$, então $-\theta < \dfrac{1}{2}$.

Há que então subdividir os casos em que o declive m_F tem sinal negativo, nulo ou positivo, isto é,

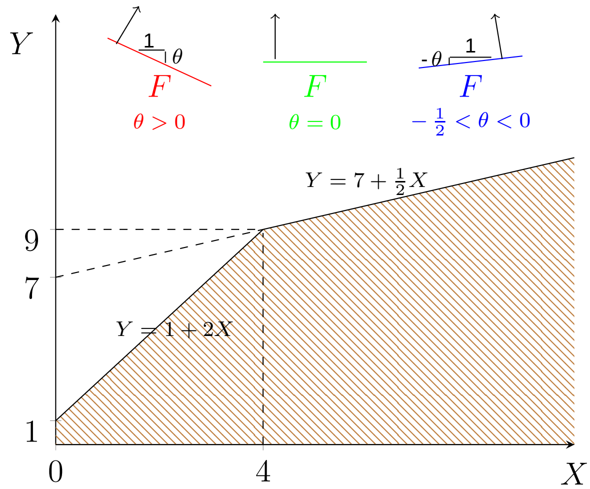
$$-\theta < 0 \quad ; \quad -\theta = 0 \quad \text{e} \quad 0 < -\theta < \frac{1}{2}$$

ou seja,

$$\theta > 0 \quad ; \quad \theta = 0 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} < \theta < 0\;,$$

respetivamente.

No gráfico seguinte é representada a região admissível, a sombreado castanho, e as retas associadas à função objetivo para cada um dos casos de valores de θ indicados acima. Para cada uma dessas retas, encontra-se ainda representada uma seta que indica o sentido do deslocamento de maximização de F.



Podemos justificar o sentido do deslocamento das retas associados à maximização de F, $F = \theta X + Y$, no gráfico acima, para cada um dos casos considerados. Com efeito,

· Se $\theta > 0$ $\big($caso a vermelho, com $m_F = -\theta\big)$:
F aumenta quando X e Y aumenta, pois os coeficientes de X e Y em F são positivos;

· Se $\theta = 0$ $\big($caso a verde, com $m_F = 0\big)$:
F aumenta quando Y aumenta, pois o seu coeficiente em F é positivo. A variação de X em nada influencia a variação de F, já que o coeficiente de X em F é nulo;

· Se $-\frac{1}{2} < \theta < 0$ $\big($caso a azul, com $0 < m_F < \frac{1}{2}\big)$:
F aumenta quando X diminui e Y aumenta, já que o coeficiente de X é negativo e o coeficiente de Y é positivo em F.

Como a região admissível é ilimitada, verifica-se que F aumenta indefinidamente em qualquer um dos deslocamentos das retas consideradas, pois estas nunca encontram limite. No caso particular $-\frac{1}{2} < \theta < 0$, que pode suscitar mais dúvidas, tal acontece porque o declive m_F é inferior a $\frac{1}{2}$, isto é, inferior ao declive da reta fronteira $Y = 7 + \frac{1}{2}X$.

Verificados todos os casos possíveis, concluímos então que, para $\theta > -\frac{1}{2}$, o Programa Linear é impossível, ou seja, não admite solução nem valor ótimos.

(0,7 val.) **b)** Considere $\theta \leq -\dfrac{1}{2}$.

(0,4 val.) **i)** Recorrendo ao algoritmo do Simplex, mostre que o Programa Linear admite sempre alguma solução ótima, identificando, de entre os valores de θ considerados, aqueles para os quais a solução ótima é única e aqueles para os quais existem múltiplas soluções ótimas, indicando o valor ótimo associado.
Para os casos em que a solução ótima encontrada é única, indique ainda a base de variáveis que conduziu à mesma.

Resolução:
Para recorrer ao algoritmo do Simplex, há que estabelecer primeiro a forma standard do Programa Linear, que é dada por:

Max $F = \theta X + Y + 0\,F_1 + 0\,F_2\ ,\quad \theta \leq -\frac{1}{2}$
sujeito a:

$$\begin{aligned} -2X + Y + F_1 &= 1 \\ -\frac{1}{2}X + Y + F_2 &= 7 \\ X, Y, F_1, F_2 &\geq 0\ , \end{aligned}$$

onde F_1 e F_2 são variáveis de folga.

De acordo com a formulação anterior do problema, temos:

Quadro inicial do Simplex:

		X	Y	F_1	F_2	$T.I.$	Δ_i	
	F_1	-2	1^*	1	0	1	1	$\leftarrow$
$-L_1 + L_2$	F_2	$-1/2$	1	0	1	7	7	
$L_1 + L_3$	F	$-\theta$	-1	0	0	0		$X = 0$
		> 0	$\uparrow$			$F = 0$		$Y = 0$

Notemos acima que, como $\theta \leq -\frac{1}{2}$, então $-\theta \geq \frac{1}{2} > 0$.

Logo, de entre as variáveis não básicas, X e Y, do quadro inicial, Y é a única que apresenta o coeficiente na linha de F negativo. Deste modo, na 1ª iteração, a variável Y será escolhida para entrar na base, passando a ocupar o lugar deixado por F_1.

1ª Iteração:

	X	Y	F_1	F_2	$T.I.$
Y	-2	1	1	0	1
F_2	$3/2$	0	-1	1	6
F	$-2-\theta$	0	1	0	1

$X = 0$

$F = 1 \quad Y = 1$

Analisemos agora o sinal de $-2-\theta$, para $\theta \leq -\frac{1}{2}$.

Caso 1: $-2-\theta \geq 0 \ \wedge \ \theta \leq -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta \leq -2$

Como todos os coeficientes da linha de F são não negativos, o quadro acima é final para o algoritmo do Simplex e o Programa Linear admite sempre solução(ões) ótima(s). O que determina a existência de múltiplas soluções ótimas é a nulidade de um dos coeficientes da linha de F que esteja associado a uma variável não básica. No quadro acima, as variáveis não básicas são X e F_1, com a última a registar um coeficiente positivo, 1, na linha de F.
Deste modo, o que determina a unicidade ou multiplicidade da(s) solução(ões) ótima(s) é o coeficiente associado a X ser positivo ou nulo, respetivamente.

Assim:

· Se $\theta < -2$, a solução ótima existe e é única, sendo dada, de acordo com o quadro acima, por $(X^*,Y^*) = (0,1)$, com valor ótimo associado de $F^* = 1$ e com base de variáveis: (Y,F_2).

· Se $\theta = -2$, existem múltiplas soluções ótimas $\big($em que $(X^*,Y^*) = (0,1)$ é uma delas$\big)$, com valor ótimo associado de $F^* = 1$.

Caso 2: $-2-\theta<0 \ \wedge \ \theta \le -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2<\theta\le -\frac{1}{2}$.

Nesta situação, o coeficiente da linha de F associado a X é negativo no quadro do Simplex da 1ª iteração, onde X é variável não básica. Deste modo, ainda não foi encontrada solução ótima e há que proceder a mais uma iteração. Com efeito, retomando o quadro do Simplex da 1ª iteração para obter o da 2ª iteração, temos:

1ª Iteração:

		X	Y	F_1	F_2	$T.I.$	Δ_i	
$(4/3)\,L_2+L_1$	Y	-2	1	1	0	1	—	
$(2/3)\,L_2$	F_2	$3/2^{**}$	0	-1	1	6	$6/(3/2)=4$	$\leftarrow$
$(2+\theta)\cdot(2/3)\,L_2+L_3$	F	$-2-\theta$	0	1	0	1		
		$\uparrow$				$F=1$	$X=0\,;\,Y=1$	

De entre as variáveis não básicas, X e F_1, do quadro acima, X é a única que apresenta o coeficiente na linha de F negativo. Deste modo, na 2ª iteração, a variável X será escolhida para entrar na base, passando a ocupar o lugar deixado por F_2.

2ª Iteração:

	X	Y	F_1	F_2	$T.I.$	
Y	0	1	$-1/3$	$4/3$	9	
X	1	0	$-2/3$	$2/3$	4	
F	0	0	$(-1-2\,\theta)/3$	$(4+2\,\theta)/3$	$9+4\,\theta$	$X^*=4$
			≥ 0	>0	$F^*=9+4\,\theta$	$Y^*=9$

Analisemos agora o sinal dos coeficientes da linha de F associados às variáveis não básicas F_1 e F_2.

Uma vez que $\theta \le -\frac{1}{2}$, então $-2\,\theta \ge 1 \ \Leftrightarrow \ -1-2\,\theta \ge 0$, o que significa que o coeficiente da linha de F associado à variável não básica F_1 é não negativo.
Por outro lado, como $\theta > -2$, então $4+2\,\theta>0$, o que significa que o coeficiente da linha de F associado à variável não básica F_2 é positivo.

Deste modo, todos os coeficientes da linha de F do quadro do Simplex anterior são não negativos, o que significa, para o Caso 2 $\left(-2 < \theta \leq -\frac{1}{2}\right)$, que o referido quadro é final e que o Programa Linear admite sempre solução(ões) ótima(s).
Juntando este resultado ao que já tinhamos verificado para o Caso 1 $\big(\theta \leq -2\big)$, mostrámos que o Programa Linear admite sempre alguma solução ótima para $\theta \leq -\frac{1}{2}$.

Resta agora, ainda no Caso 2 $\left(-2 < \theta \leq -\frac{1}{2}\right)$, analisar quando a solução ótima é única ou existem múltiplas soluções. Com efeito, uma vez que, nesse caso, as variáveis não básicas são F_1 e F_2 e o coeficiente da linha de F associado a F_2 é positivo, o que determina a unicidade ou multiplicidade da(s) solução(ões) ótima(s) é o coeficiente da linha de F associado a F_1 ser positivo ou nulo, respetivamente.

Assim:

· Se $(-1-2\,\theta)/3 > 0 \;\wedge\; -2 < \theta \leq -\frac{1}{2}$, isto é, $-2 < \theta < -\frac{1}{2}$, a solução ótima existe e é única, sendo dada, de acordo com o último quadro, por $(X^*,Y^*) = (4,9)$, com valor ótimo associado de $F^* = 9 + 4\,\theta$ e com base de variáveis: (X,Y).

· Se $(-1-2\,\theta)/3 = 0 \;\wedge\; -2 < \theta \leq -\frac{1}{2}$, isto é, $\theta = -\frac{1}{2}$, existem múltiplas soluções ótimas $\big($em que $(X^*,Y^*) = (4,9)$ é uma delas$\big)$, com valor ótimo associado de $F^* = 9+4\,\theta = 9-\frac{4}{2} = 7$.

Concluímos então que, para $\theta \leq -\frac{1}{2}$, o Programa Linear admite sempre solução(ões) ótima(s), que são múltiplas quando $\theta = -2$ e $\theta = -\frac{1}{2}$, e são únicas nos restantes casos.

(0,3 val.) **ii)** Para os parâmetros θ indicados em b)i) como associados à existência de múltiplas soluções ótimas, recorra ao Método Gráfico para as identificar e classificar quanto a serem ou não admissíveis/básicas/degeneradas.

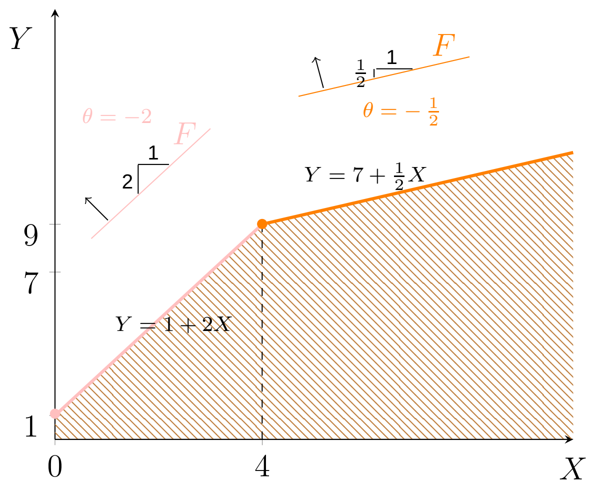
Resolução:
De acordo com b)i), verificámos que o Programa Linear admite múltiplas soluções ótimas quando $\theta = -2$ e $\theta = -\frac{1}{2}$.
Para cada um dos valores de θ indicados, determinemos os

declives das retas associadas à função objetivo F e o sentido de deslocamento dessas retas para maximizar F. Com efeito,

· Se $\theta = -2$, então $F = -2\,X + Y \;\Leftrightarrow\; Y = F + 2\,X$.
  Pelo que, $m_F = 2$.

· Se $\theta = -\frac{1}{2}$, então $F = -\frac{1}{2}\,X + Y \;\Leftrightarrow\; Y = F + \frac{1}{2}\,X$.
  Pelo que, $m_F = \frac{1}{2}$.

Para qualquer um dos valores de θ acima, o coeficiente de X é negativo e o de Y é positivo em F, e, portanto, F aumenta quando X diminui e Y aumenta.
No gráfico seguinte é representada a região admissível e as retas associadas à função objetivo F, quando $\theta = -2$ $\big($a rosa$\big)$ e $\theta = -\frac{1}{2}$ $\big($a laranja$\big)$, estando indicado em cada uma delas a seta com o sentido do deslocamento de maximização de F.



Observamos que as retas associadas à função objetivo F, para $\theta = -2$ e $\theta = -\frac{1}{2}$, têm o mesmo declive das retas fronteira $Y = 1 + 2\,X$ e $Y = 7 + \frac{1}{2}\,X$, respetivamente, e, portanto, estas serão tocadas em último lugar no sentido de deslocamento de maximização de F. Assim:

· Para $\theta = -2$:

As soluções ótimas são todos os pontos $(X{,}Y)$ do segmento de reta $Y = 1 + 2\,X,\;\; 0 \leq X \leq 4$.

Todas essas soluções são admissíveis, pois estão contidas na região admissível.
Uma vez que uma solução é básica se for um vértice da região admissível, então concluímos que os extremos do segmento de reta indicado, isto é, os pontos $(0{,}1)$ e $(4{,}9)$, são soluções básicas. Os restantes pontos do segmento de reta, isto é, os pontos do seu interior, correspondem a soluções não básicas.

Vejamos agora em que condições uma solução é degenerada. Tendo em conta a forma standard do Programa Linear, já estabelecida em b)i), temos 4 variáveis (2 variáveis de decisão, X e Y, e 2 variáveis de folga, F_1 e F_2) e ainda 2 igualdades de restrição $\left(-2\,X + Y + F_1 = 0 \text{ e } -\frac{1}{2}\,X + Y + F_2 = 7\right)$.
Deste modo, uma solução é degenerada, desde que tenha mais do que 4-2=2 variáveis nulas (ler Pág.60 do Manual), o que implica que pelo menos uma das variáveis de decisão, X ou Y, tenha de ser nula.
Ora, das soluções ótimas referidas, a única candidata a ser degenerada, isto é, com pelo menos uma das variáveis de decisão nula, é a associada ao ponto extremo $(0{,}1)$ do segmento de reta. De acordo com as igualdades de restrição do problema na forma standard, indicadas acima, verificamos que a $X = 0$ e $Y = 1$ correspondem $F_1 = 0$ e $F_2 = 6$, o que significa que não temos mais do que 2 variáveis nulas, e portanto, a solução em causa não é degenerada.

Concluímos então que todos os pontos $(X{,}Y)$ do segmento de reta $Y = 1 + 2\,X$, $0 \leq X \leq 4$, são soluções ótimas admissíveis e não degeneradas, das quais $(0{,}1)$ e $(4{,}9)$ são básicas e as restantes (pontos interiores do segmento de reta) são não básicas.

· Para $\theta = -\frac{1}{2}$:

As soluções ótimas são todos os pontos $(X{,}Y)$ da semi-reta $Y = 7 + \frac{1}{2}\,X,\ \ X \geq 4$.
De acordo com o explicado atrás, todas as soluções ótimas indicadas são admissíveis, pois pertencem à região admissível, e são não degeneradas, pois nenhuma das variáveis de decisão, X e Y, é nula. Por outro lado, apenas o extremo inicial

$(4{,}9)$ da semi-reta corresponde a uma solução básica, já que é um vértice da região admissível. Todos os restantes pontos da semi-reta correspondem a soluções não básicas.

(0,5 val.) **c)** Considere $\theta = -\dfrac{1}{2}$ e que é adicionada a condição de restrição $-X + Y \leq 1$ ao Programa Linear original.

(0,2 val.) **i)** Represente graficamente o novo espaço de soluções admissíveis e classifique-o.

Resolução:
Para $\theta = -\frac{1}{2}$, ao juntar $-X + Y \leq 1$, isto é, $Y \leq 1 + X$, às condições de restrição do problema original, obtemos o Programa Linear dado por:

Max $F = -\dfrac{1}{2}X + Y$
sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} -2\,X + Y & \leq & 1 \\ -\dfrac{1}{2}X + Y & \leq & 7 \\ Y & \leq & 1 + X \\ X, Y & \geq & 0 \; , \end{array}$$

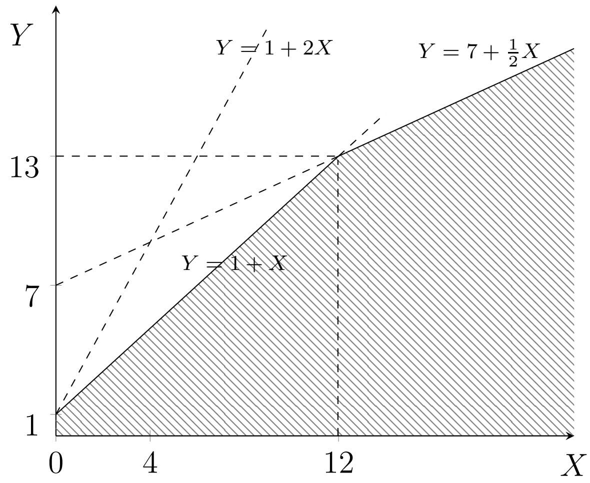
Com a adição da nova condição de restrição, há que averiguar em que pontos a reta $Y = 1 + X$ interseta as retas $Y = 1 + 2\,X$ e $Y = 7 + \frac{1}{2}X$. Com efeito,

$$\begin{cases} Y = 1 + X \\ Y = 1 + 2\,X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2\,X = 1 + X \\ Y = 1 + 2\,X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 0 \\ Y = 1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} Y = 1 + X \\ Y = 7 + \frac{1}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \frac{1}{2}X = 1 + X \\ Y = 7 + \frac{1}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 12 \\ Y = 13 \end{cases}$$

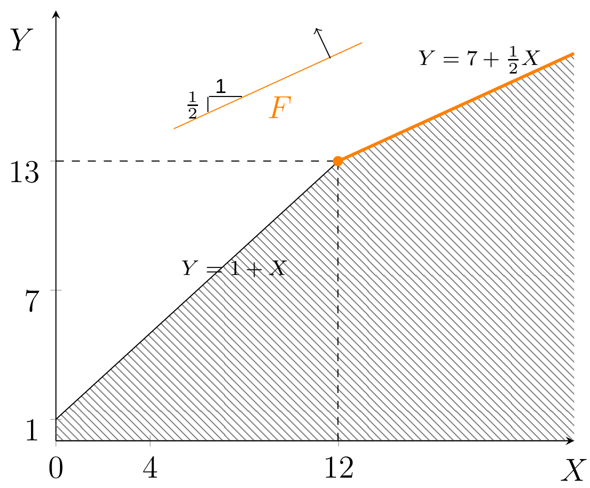
pelo que, a reta $Y = 1 + X$ interseta a reta $Y = 1 + 2\,X$ no ponto $(0{,}1)$ e a reta $Y = 7 + \frac{1}{2}X$ no ponto $(12{,}13)$.
Há que agora intersetar a região admissível original com a região abaixo da reta $Y = 1 + X$ para obter a nova região admissível, assinalada a cinzento, no gráfico seguinte:



Como podemos observar, o novo espaço de soluções admissíveis é um politopo convexo ilimitado.

(0,15 val.) **ii)** A introdução da nova condição de restrição altera a(s) solução(ões) ótima(s) do programa linear original para $\theta = -\frac{1}{2}$? E o valor ótimo? Justifique.

Resolução:
Para $\theta = -\frac{1}{2}$, a reta associada a F tem declive $\frac{1}{2}$ e maximiza F no sentido da diminuição de X e do aumento de Y, de acordo com b)ii). Nesse deslocamento, a reta irá intersetar em último lugar os pontos da nova região admissível sobre a reta $Y = 7 + \frac{1}{2}X$, como o gráfico abaixo mostra.



Verificamos então que, para $\theta = -\frac{1}{2}$, as novas soluções ótimas são todos os pontos da semi-reta $Y = 7 + \frac{1}{2}X$, $X \geq 12$, que está incluida na semi-reta de soluções ótimas originais para $X \geq 4$, de acordo com b)ii).
Deste modo, a introdução da nova condição de restrição altera o conjunto original das soluções ótimas, pois restringe-o, mas não altera o valor ótimo original, que é $F^* = 7$, de acordo com b)i)), por termos obtido um subconjunto de soluções ótimas originais.

(0,15 val.) **iii)** Adicione mais uma condição de restrição adequada ao já modificado Programa Linear por forma a que ele fique inteiro e formule-o.
Nessas condições quais são as soluções ótimas associadas? E o valor ótimo? Justifique.

Resolução:
A condição de restrição que torna o último Programa Linear inteiro é a de que as variáveis de decisão, X e Y sejam inteiras. Uma vez que elas também têm de ser não negativas, por definição, então podemos considerar como última condição de restrição do novo programa que $X{,}Y \in \mathbb{N}_0$.
O novo problema fica então formulado do seguinte modo:

Max $F = -\dfrac{1}{2}X + Y$
sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} -2X + Y & \leq & 1 \\ -\dfrac{1}{2}X + Y & \leq & 7 \\ -X + Y & \leq & 1 \\ X, Y & \in & \mathbb{N}_0 \end{array}$$

Nestas condições, as soluções ótimas são todas as obtidas em c)ii) que têm coordenadas inteiras, isto é, são os pontos da semi-reta, $Y = 7 + \frac{1}{2}X$, $X \geq 12$, com coordenadas inteiras.
Para determinar os pontos em questão, notemos que $7 + \frac{1}{2}X$ só é inteiro, quando $\frac{1}{2}X$ é inteiro, ou seja, quando X for múltiplo de 2, isto é, da forma $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Deste modo, os pontos da semi-reta referida com coordenadas inteiras são dados por:

$$\left(2k\,,7+\frac{1}{2}(2k)\right)\ ,\quad \text{com}\ \ 2k\geq 12\ \wedge\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Logo, o conjunto de soluções ótimas é dado por:

$$\Big\{\big(2k\,,7+k\big)\ ,\quad k\geq 6\ \wedge\ k\in\mathbb{N}_0\Big\}\ ,$$

às quais está associado o mesmo valor ótimo estabelecido em c)ii), isto é, $F^*=7$, por serem também soluções ótimas do problema nessa alínea.

(0,6 val.) **3.** Considere um Programa Linear com variáveis de decisão X, Y, ao qual é aplicado o Método das Penalidades e o algoritmo do Simplex para a sua resolução a partir do quadro inicial:

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	$T.I.$
F_1	1	1	1	0	0	0	14
F_2	-2	1	0	1	0	0	5
α	-1	1	0	0	-1	1	6
$-F$	$10+M$	$20-M$	0	0	M	0	$-6M$

onde F_1, F_2 e F_3 são as variáveis de folga, α a variável artificial e M uma constante positiva de valor muito elevado.

(0,3 val.) **a)** Estabeleça a forma standard do Programa Linear original e, a partir dela, a forma geral do programa a 2 variáveis de decisão, X e Y.

Resolução:

No quadro inicial do Simplex, temos $-F$ na linha da função objetivo, o que significa que estamos a resolver um problema relacionado com a maximização dessa função. Por outro lado, temos 3 variáveis de folga, o que indica, para além da condição de não negatividade, a existência de mais 3 condições de restrição.

Notemos que, de acordo com o Método das Penalidades, a linha da função objetivo, $-F$, do quadro inicial do Simplex resulta de operações que envolvem a linha dos coeficientes de $-F$ e a linha associada à variável artificial α, com o objetivo de a tornar básica.

Com efeito, seja $-F$ a função objetivo dada por:

$$-F = c\,X + d\,Y + 0\,F_1 + 0\,F_2 + 0\,F_3 - M \cdot \alpha \ ,$$

onde os coeficientes c e d em X e Y, respetivamente, são desconhecidos e M é uma constante positiva de valor muito elevado.

A representação tabular do Programa Linear dada abaixo indica a operação de linhas efetuada com vista a obtermos a última linha do quadro inicial do Simplex enunciado.

		X	Y	F_1	F_2	F_3	α	$T.I.$
	F_1	1	1	1	0	0	0	14
	F_2	-2	1	0	1	0	0	5
	α	-1	1	0	0	-1	1	6
	$-F$	$-\,c$	$-\,d$	0	0	0	M	0
$-M\,L_3 + L_4$	$-F$	$10 + M$	$20 - M$	0	0	M	0	$-\,6M$

Como podemos observar, para tornar a variável artificial α básica, há que converter o seu coeficiente na linha de $-F$ num valor nulo, o que implica multiplicar por $-M$ a linha, L_3, associada a α e somá-la à linha, L_4, dos coeficientes associados à função objetivo $-F$, isto é, realizar a operação $-M\,L_3 + L_4$.

Deste modo, podemos determinar o valor dos coeficientes de c e d, com base na operação pela qual originam os coeficientes $10 + M$ e $20 - M$, respetivamente, da linha final de $-F$.

Com efeito, temos

$$(-M) \times (-1) - c = 10 + M \quad \Leftrightarrow \quad c = -10$$

e, por outro lado, que

$$-M - d = 20 - M \quad \Leftrightarrow \quad d = -20$$

Logo, podemos escrever que

$$-F = -10\,X - 20\,Y + 0\,F_1 + 0\,F_2 + 0\,F_3 - M \cdot \alpha$$

Notemos agora que Min $F = -$ Max $(-F)$.

Deste modo, o Programa Linear pode escrito na forma standard do seguinte modo:

Min $F = 10\,X + 20\,Y + M \cdot \alpha$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} X + Y + F_1 & = & 14 \\ -\,2\,X + Y + F_2 & = & 5 \\ -\,X + Y - F_3 + \alpha & = & 6 \\ X, Y, F_1, F_2, F_3, \alpha & \geq & 0 \end{array}$$

o que corresponde à forma geral, nas variáveis de decisão X e Y, dada por:

Min $F = 10\,X + 20\,Y$

sujeito a:

$$\begin{array}{rcl} X + Y & \leq & 14 \\ -\,2\,X + Y & \leq & 5 \\ -\,X + Y & \geq & 6 \\ X, Y & \geq & 0 \end{array}$$

(0,3 val.) **b)** Resolva o Programa Linear recorrendo ao algoritmo do Simplex a partir do quadro inicial fornecido, indicando a solução ótima e o valor ótimo associado, em caso de existência.

Resolução:

Partindo do quadro inicial fornecido temos:

		X	Y	F_1	F_2	F_3	α	$T.I.$	Δ_i	
$-\,L_2 + L_1$	F_1	1	1	1	0	0	0	14	14	
	F_2	-2	1^*	0	1	0	0	5	5	$\leftarrow$
$-\,L_2 + L_3$	α	-1	1	0	0	-1	1	6	6	
$(M - 20)\,L_2 + L_4$	$-F$	$10 + M$	$20 - M$	0	0	M	0	$-6M$		$X = 0$
		> 0	$\uparrow$			> 0		$F = 6M$		$Y = 0$

Uma vez que M é uma constante positiva de valor muito elevado, de entre as variáveis não básicas, X, Y e F_3, do quadro inicial do Simplex, Y é a única que apresenta o coeficiente na linha de $-F$ negativo. Deste modo, na 1ª iteração, a variável Y será escolhida para entrar na base, passando a ocupar o lugar deixado por F_2.

1ª iteração:

		X	Y	F_1	F_2	F_3	α	$T.I.$	Δ_i	
$-3\,L_3 + L_1$	F_1	3	0	1	-1	0	0	9	3	
$2\,L_3 + L_2$	Y	-2	1	0	1	0	0	5	-	
	α	1^{**}	0	0	-1	-1	1	1	1	$\leftarrow$
$(M-50)\,L_3 + L_4$	$-F$	$50-M$	0	0	$M-20$	M	0	$-M-100$		$X=0$
		$\uparrow$			>0	>0		$F = M+100$		$Y=5$

Como M é uma constante positiva de valor muito elevado, de entre as variáveis não básicas, X, F_2 e F_3, do quadro do Simplex dado acima, X é a única que apresenta o coeficiente na linha de $-F$ negativo. Deste modo, na próxima iteração, a variável X será escolhida para entrar na base, passando a ocupar o lugar deixado pela variável artificial, α.

2ª iteração:

	X	Y	F_1	F_2	F_3	α	$T.I.$	
F_1	0	0	1	2	3	-3	6	
Y	0	1	0	-1	-2	2	7	
X	1	0	0	-1	-1	1	1	
$-F$	0	0	0	30	50	$M-50$	-150	$X^*=1$
				>0	>0	>0	$F^*=150$	$Y^*=7$

Como os coeficientes da linha de $-F$ associados às variáveis do quadro anterior são todos não negativos, então atingiu-se a solução ótima, $(X^*,Y^*) = (1{,}7)$, que é única, já que nenhum dos coeficientes associados às variáveis não básicas, F_2, F_3 e α, é nulo. O valor ótimo associado é $F^* = 150$.

(0,9 val.) **4.** Uma linha de atendimento telefónico de apoio ao cliente de uma empresa de telecomunicações tem ao serviço um único operador que trabalha 6 horas por dia para satisfazer pedidos e prestar informações.

Sempre que determinado cliente esteja a ser atendido pelo operador, as restantes chamadas existentes em linha são colocadas em espera, ao som de um música comercial, até serem atendidas por ordem de chegada.

Atualmente, a linha de apoio ao cliente recebe, em média, 20 chamadas por hora e cada chamada colocada em espera demora, em média, 4 minutos até ser atendida pelo operador.

Considere que as chamadas entram em linha de acordo com um Processo de Poisson e que o tempo de atendimento de cada uma delas pelo operador segue uma distribuição Exponencial Negativa.

(0,1 val.) **a)** Identifique e caracterize o tipo de sistema de fila de espera associado ao problema enunciado.

Resolução:

O sistema é $M/M/1$, pois:

· O processo de chegada das chamadas é Poissoniano;

· A duração do serviço do operador no atendimento das chamadas segue uma distribuição Exponencial Negativa;

· Um só servidor assegura o atendimento das chamadas;

· A população de chamadas é ilimitada;

· A disciplina da fila de espera é FIFO, isto é, as chamadas são atendidas por ordem de chegada.

(0,2 val.) **b)** Determine o tempo médio de atendimento de cada chamada pelo operador.

Resolução:

De acordo com o enunciado, a taxa média de chegada de chamadas é de

$$\lambda = 20\,\text{hora}^{-1} = \frac{20}{60}\,\text{min}^{-1} = \frac{1}{3}\,\text{min}^{-1} \ ,$$

tendo em conta que 1 hora tem 60 minutos.

Por outro lado, o tempo médio de espera de cada chamada colocada em espera é de $W_q = 4$ min.

Seja μ, $0 < \mu < 1$, a taxa média de duração do atendimento das chamadas pelo operador (que corresponde ao parâmetro da lei Exponencial Negativa).

Pretende-se determinar o tempo médio de atendimento de cada chamada pelo operador, que, de acordo com a lei Exponencial Negativa, é dado por $\frac{1}{\mu}$. Para o efeito, calculemos μ no que se segue.

$$W_q = \frac{\rho}{\mu - \lambda} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\mu - \lambda} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{\frac{1}{3\,\mu}}{\mu - \frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = \frac{1}{3\,\mu\left(\mu - \frac{1}{3}\right)} \quad \Leftrightarrow \quad 4 = \frac{1}{3\,\mu^2 - \mu} \quad \Leftrightarrow \quad 3\,\mu^2 - \mu - \frac{1}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 3 \times \left(-\frac{1}{4}\right)}}{2 \times 3} \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1 \pm 2}{6} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1}{2} \ \vee \ \mu = -\frac{1}{6}.$$

Como $\mu > 0$, então $\mu = \frac{1}{2}$ min^{-1}.

Logo, o tempo médio de atendimento de cada chamada pelo operador é de

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ minutos.}$$

(0,1 val.) **c)** Qual o número médio de chamadas existentes em linha (espera + atendimento)?

Resolução:

O número médio de chamadas existentes em linha (espera + atendimento) é dado por:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3-2}{6}} = 2 \text{ chamadas },$$

tendo em conta os valores de λ e μ estabelecidos em b).

(0,1 val.) **d)** Qual a probabilidade de uma chamada permanecer em linha mais de 2 minutos?

A probabilidade de uma chamada permanecer em linha (espera + atendimento) durante mais de t minutos, $t \geq 0$, é dada por:

$$P(W > t) \;=\; e^{-\mu\,(1-\rho)\,t} \;=\; e^{-\mu\,\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\,t} \;=\; e^{(-\mu+\lambda)\,t} \;=$$

$$=\; e^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\,t} \;=\; e^{-\frac{1}{6}\,t}$$

Substituindo acima t por 2, concluímos então que a probabilidade de uma chamada permanecer em linha mais de 2 minutos é de

$$P(W > 2) \;=\; e^{-\frac{1}{6}\times 2} \;=\; e^{-\frac{1}{3}} \;\approx\; 71{,}65\%$$

(0,1 val.) **e)** Em média, quanto tempo o operador está desocupado durante o horário diário de trabalho?

Resolução:

O operador está desocupado quando não existem chamadas em linha para atender, o que ocorre com probabilidade

$$P_0 = 1-\rho = 1-\frac{\lambda}{\mu} = 1-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, em média, o operador está livre ou desocupado em $\frac{1}{3}$ da duração do seu horário diário de trabalho (6 horas), ou seja, em $\frac{1}{3}\times 6 = 2$ horas.

(0,3 val.) **f)** Com objetivo de reduzir para menos de 1 minuto o tempo médio de espera das chamadas efetuadas para a linha de apoio ao cliente, a empresa de telecomunicações pretende reforçar a equipa de operadores no serviço de atendimento telefónico, colocando-os a trabalhar em simultâneo e nas mesmas condições fixadas originalmente para o único operador existente.

Qual o número mínimo de operadores novos a contratar para que o objetivo referido seja alcançado?

Resolução:

Com S operadores (ou servidores) temos um sistema de fila de espera do tipo $M/M/S$, $S \geq 2$, para o qual se pretende reduzir W_q para menos de 1 minuto.

Uma vez que, no novo sistema, os S operadores irão trabalhar em simultâneo, nas mesmas condições fixadas para o único operador originalmente existente, os valores da taxa média, λ, do processo de chegada das chamadas, e da taxa média, μ, da duração do atendimento de cada chamada por cada operador, irão manter-se, isto é, $\lambda = \frac{1}{3}$ min^{-1} e $\mu = \frac{1}{2}$ min^{-1}.
Deste modo, o tempo médio de espera de cada chamada em linha para o sistema com S operadores é dado por:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3\, S^S\, \rho^{S+1}\, P_0}{S!\,(1-\rho)^2} \ ,$$

com

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{2}{3S} \quad \text{e} \quad P_0 = \left[\frac{S^S\, \rho^{S+1}}{S!\,(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S} \frac{(S\rho)^n}{n!} \right]^{-1}$$

Sendo esperado que, com o aumento do número de operadores, S, o tempo médio de espera de cada chamada em linha, W_q, diminua, analisemos a evolução de W_q com o aumento do valor de S.
Recordando que, para $S = 1$, temos $W_q = 4$ minutos por hipótese, considerar-se-á o menor valor de $S \geq 2$ inteiro, para o qual se obtenha $W_q < 1$ minuto. Com efeito,

Para $S = 2$:

$$\rho = \frac{2}{3 \times 2} = \frac{1}{3}$$

e

$$P_0 = \left[\frac{2^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3}{2!\,\frac{2}{3}} + \sum_{n=0}^{2} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n!} \right]^{-1} = \left(\frac{1}{9} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} \right)^{-1} = \frac{1}{2}$$

Logo,

$$W_q = \frac{3 \times 2^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{1}{2}}{2! \times \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{4} < 1$$

Concluímos então que basta incluir, no mínimo, 1 novo operador na equipa de atendimento, para assegurar que o tempo médio de espera de cada chamada em linha seja inferior a 1 minuto.