E-Fólio A - Resolução

1. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & x \leq 0 \\ \\ \dfrac{2\sin(x)}{x} - x & x > 0 \end{cases}$$

   (a) **[0.1 val.]** Indique o domínio de f.
   O domínio de f é $\mathbb{R}$.

   (b) **[0.3 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Temos que

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{x} = 0,$$

   logo

$$-2x = o(x^2), \text{ quando } x \to -\infty,$$

   pelo que (ver Proposição 9 do manual)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 2x + 2\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(x^2 + 2\right) = +\infty,$$

   Temos também que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2\sin(x)}{x} - x\right).$$

   Como $-1 \leq \sin(x) \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$, então para $x > 0$, temos

$$\frac{-2}{x} \leq \frac{2\sin(x)}{x} \leq \frac{2}{x},\ \forall x \in \mathbb{R},$$

   e como

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x},$$

   pelo teorema das sucessões enquadradas, também

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2\sin(x)}{x} = 0,$$

   logo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-x) = -\infty.$$

(c) **[0.3 val.]** Diga, justificando, qual o valor lógico da seguinte proposição: f é contínua no ponto $x = 0$.

Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2\sin(x)}{x} - x\right) = 2,$$

pois

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2 - 2x + 2\right) = 2.$$

Como também $f(0) = 2$, temos

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

e a função f é contínua no ponto $x = 0$, pelo que a proposição é verdadeira.

(d) **[0.3 val.]** Calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[-1, 1]$. Temos

$$\Delta(f; -1, 1) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2\sin(1) - 1 - (1 + 2 + 2)}{2} = \sin(1) - 3.$$

2. **[0.75 val.]** Prove por definição de limite que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)x^2 + 3}{3} = 1.$$

Temos que

$$\left|\frac{\sin(x)x^2 + 3}{3} - 1\right| = \left|\frac{\sin(x)x^2 + 3 - 3}{3}\right| = \left|\frac{\sin(x)x^2}{3}\right| = \frac{|\sin(x)|x^2}{3} \le \frac{x^2}{3}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$\frac{x^2}{3} < \epsilon \iff x^2 < 3\epsilon \iff |x| < \sqrt{3\epsilon}.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \sqrt{3\epsilon}$, para que, sempre que $|x| < \delta$, se tenha necessariamente $\left|\frac{\sin(x)x^2 + 3}{3} - 1\right| < \epsilon$. Concluímos, portanto, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)x^2 + 3}{3} = 1.$$

3. **[0.75 val.]** Calcule

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\cos(5n)5n + n^5}{2n^5 + 3n^2 + 4}.$$

Temos

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{\cos(5n)5n + n^5}{2n^5 + 3n^2 + 4} = \lim_{n\to +\infty} \frac{\frac{\cos(5n)5n}{n^5} + \frac{n^5}{n^5}}{\frac{2n^5}{n^5} + \frac{3n^2}{n^5} + \frac{4}{n^5}} = \lim_{n\to +\infty} \frac{\frac{\cos(5n)5n}{n^5} + 1}{2 + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^5}}$$

Agora notamos que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^3} = 0 \quad \text{e também} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n^5} = 0.$$

Por outro lado,

$$\frac{-5}{n^4} = \frac{-5n}{n^5} \leq \frac{\cos(5n)5n}{n^5} \leq \frac{5n}{n^5} = \frac{5}{n^4}$$

e como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-5}{n^4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5}{n^4} = 0,$$

pelo teorema das sucessões enquadradas,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(5n)5n}{n^5} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(5n)5n + n^5}{2n^5 + 3n^2 + 4} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\cos(5n)5n}{n^5} + 1}{2 + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^5}} = \frac{1}{2}.$$

4. **[0.75 val.]** Calcule

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right)}{x^3 - 4x^2 + 4x}.$$

Uma vez que as funções que aparecem no numerador e denominador, $e^x\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right)$ e $x^3 - 4x^2 + 4x$ são ambas contínuas no ponto $x = 2$, os respectivos limites, quando x tender para 2, são iguais às suas imagens no ponto 2 e verificamos imediatamente por substituição de x por 2, que temos uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Podemos factorizar o polinómio do numerador,

$$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)^2(x+2)$$

e para o denominador temos

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2.$$

Então,

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x\left(x^3 - 2x^2 - 4x + 8\right)}{x^3 - 4x^2 + 4x} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x(x-2)^2(x+2)}{x(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x(x+2)}{x} = \frac{4e^2}{2} = 2e^2.$$

5. **[0.75 val.]** Sejam f e g funções reais de variável real definidas por

$$f(x) = \frac{x}{3}, \qquad g(x) = \frac{x^3}{2} - 2x^2 + 3.$$

Prove que os gráficos das funções f e g se intersectam em pelo menos três pontos.

Vamos definir a função $h(x) := f(x) - g(x)$, que é uma função polinomial, porque é definida como a diferença das duas funções polinomiais f e g. Então h é uma função contínua em $\mathbb{R}$. Agora temos

$$h(-2) = \frac{-2}{3} - \left(\frac{(-2)^3}{2} - 2\times(-2)^2 + 3\right) = \frac{25}{3} > 0,$$

$$h(0) = -3 < 0,$$

$$h(2) = \frac{2}{3} - \left(\frac{2^3}{2} - 2 \times (2^2) + 3\right) = \frac{5}{3} > 0$$

e

$$h(4) = \frac{4}{3} - \left(\frac{4^3}{2} - 2 \times (4^2) + 3\right) = -\frac{5}{3} < 0.$$

Então, h muda de sinal nos intervalos $]-2,0[$, $]0,2[$ e $]2,4[$, e pelo teorema de Bolzano existem $r_1 \in]-2,0[$, $r_2 \in]0,2[$ e $r_3 \in]2,4[$, tais que

$$h(r_1) = h(r_2) = h(r_3) = 0.$$

Além disso, como os intervalos $]-2,0[$, $]0,2[$ e $]2,4[$ são disjuntos, concluímos que r_1, r_2 e r_3 são distintos. Então, por definição da função h, existem pontos distintos r_1, r_2 e r_3 tais que

$$f(r_1) = g(r_1), \quad f(r_2) = g(r_2) \quad \text{e} \quad f(r_3) = g(r_3),$$

e portanto os gráficos das funções f e g intersectam-se em pelo menos três pontos, como se pretendia mostrar.

FIM