Universidade Aberta
www.uab.pt

Ministério da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior

U.C. 21082
Matemática Finita

19 de junho de 2019

Critérios de avaliação

Questões de Escolha Múltipla:

- Na prova de **Exame**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 4 questões de escolha múltipla é de 0 valores.
- No **P-fólio**, cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta incorreta será descontado $\frac{1}{3}$ de valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões de escolha múltipla é de 0 valores.

Restantes Questões:

- Para a correção destas questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas, a capacidade de escrever clara, objetiva e corretamente, de estruturar logicamente as respostas e de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
- Todos os cálculos, raciocínios e afirmações efetuados devem estar cuidadosa e detalhadamente justificados.
- Não é atribuída classificação a uma resposta não justificada.
- Serão penalizados raciocínios contraditórios. De acordo com o grau de gravidade serão ainda penalizadas afirmações erradas.

Correção Sumária

Nas páginas seguintes, a sugestão de uma sequência de resolução para uma determinada questão deve ser interpretada como uma das sequências possíveis. Será atribuída cotação análoga se, em alternativa, for apresentada outra, igualmente correta.

As justificações apresentadas são em geral muito mais breves do que é exigido numa prova de avaliação.

Exame: Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**	**4.**
b)	**b)**	**d)**	**c)**

P-fólio: Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	**2.**	**3.**
b)	**d)**	**c)**

5. (**Exame**: 4.0 valores)

5.1. (**Exame**: 1.20 valor) Se qualquer elemento pode integrar a comissão, existem

$$\binom{17+15}{8} = \binom{32}{8}$$

diferentes possibilidades para a constituição da comissão.

5.2. (**Exame**: 1.30 valor; **P-fólio**[1]: 1.50 valor) Para a escolha dos 4 informáticos existem

$$\binom{17}{4}$$

possibilidades. Da mesma maneira, para a escolha dos 4 representantes da matemática existem

$$\binom{15}{4}$$

maneiras diferentes de o fazer. Logo, existem

$$\binom{17}{4}\binom{15}{4}$$

possibilidades diferentes para que a comissão integre 4 informáticos e 4 matemáticos.

5.3. (**Exame**: 1.50 valor) O número total de diferentes comissões formadas **só** por matemáticos é igual a

$$\binom{15}{8}.$$

Isto significa que existem

$$\binom{32}{8} - \binom{15}{8}$$

maneiras diferentes para formar uma comissão em que **pelo menos** um dos elementos seja um informático, onde, note-se, o primeiro coeficiente binomial é o número total de diferentes comissões que se podem formar (cf. alínea 5.1).

[1] Pergunta 4 do P-fólio.

6. (**Exame**: 2.0 valores) Pela fórmula da extracção tem-se

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1}$$

onde

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}.$$

Relativamente a esta última soma, resulta da fórmula binomial que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k} = (-1+1)^{n-1} = 0.$$

Consequentemente,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n-1}{k-1} = 0.$$

7. (**Exame**: 3.50 valores)

7.1. (**Exame**: 1.70 valor; **P-fólio**[2]: 1.50 valor)
Supondo que existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + by = 1,$$

então

$$acx + bcy = c, \quad c \in \mathbb{Z}.$$

Assim sendo, como $a \mid (ac)$, resulta da hipótese $a \mid (bc)$ que

$$a \mid \underbrace{((ac)x + (bc)y)}_{=c},$$

cf. Lema 1.1 alínea (i) do texto sobre Divisibilidade.

7.2. (**Exame**: 1.80 valor)
Suponhamos que $p \not| a$. Então, como p é primo, $\mathrm{mdc}(p, a) = 1$. Logo, pelo Teorema 1.7 (Bachet-Bézout) existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$px + ay = 1.$$

Assim sendo, resulta da alínea anterior que

$$p \mid (ab) \implies p \mid b.$$

Um raciocínio semelhante aplica-se se se suposer que $p \not| b$.

[2]Pergunta 5 do P-fólio.

8. (**Exame e P-fólio**[3]: 1.50 valor) Dividindo 1001 por 109 obtém-se $1001 = 109 \times 9 + 20$. Logo e pelo Lema 1.4 do texto sobre Divisibilidade, $\text{mdc}(1001, 109) = \text{mdc}(109, 20)$. Do mesmo modo, $109 = 20 \times 5 + 9$, pelo que o mesmo Lema conduz a $\text{mdc}(109, 20) = \text{mdc}(20, 9)$.

9. (**Exame**: 5.0 valores; **P-fólio**[4]: 4.50 valores)

9.1. (**Exame e P-fólio**: 1.50 valor)
Dada a relação de recorrência

$$a_n = 12a_{n-1} - 35a_{n-2},$$

o polinómio característico correspondente é igual a

$$p(t) = t^2 - 12t + 35.$$

Sendo as raízes de p iguais a 5 e a 7, tem-se então que cada termo a_n da solução geral é igual a

$$a_n = \alpha 5^n + \beta 7^n$$

para

$$\alpha + \beta = a_0 = 0, \quad 5\alpha + 7\beta = a_1 = 2,$$

ou seja, para $\alpha = -\beta = -1$.

9.2. (**Exame**: 1.90 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)
Case Base: $\mathbf{n = 0}$. Neste caso tem-se $a_1 + 2 \cdot 5^1 = 2 + 10 = 12$ que é um múltiplo de 3. O caso base fica assim provado.
Hipótese de indução: Dado $n \in \mathbb{N}$, **qualquer**, suponhamos que 3 é um divisor de

$$a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1} = 7^{2n+1} + 5^{2n+1}.$$

Tese de indução: 3 é um divisor de

$$a_{2(n+1)+1} + 2 \cdot 5^{2(n+1)+1} = 7^{2n+3} + 5^{2n+3}.$$

Uma vez que

$$7^{2n+3} + 5^{2n+3} = 7^2(7^{2n+1} + 5^{2n+1}) - 5^{2n+1}(7^2 - 5^2)$$

em que, pela hipótese de indução, 3 é um divisor de $7^{2n+1} + 5^{2n+1}$ e 3 é um divisor de $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$, tem-se que 3 é um divisor de $7^{2n+3} + 5^{2n+3}$, o que prova a tese de indução.
Pelo método de indução matemática, fica assim provado que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, 3 é um divisor de $a_{2n+1} + 2 \cdot 5^{2n+1}$.

[3] Pergunta 6 do P-fólio.
[4] Grupo 7 do P-fólio.

9.3. (**Exame**: 1.60 valor; **P-fólio**: 1.50 valor)

Como 5 é um número primo, resulta do Lema 1.11 alínea 1 do Texto sobre Divisibilidade que para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$, fixo, $\text{mdc}(a_n, 5) = m$ para $m = 1$ ou $m = 5$. Suponhamos que $m = 5$. Isto significa, em particular, que $5 \mid a_n$. Por linearidade tem-se então

$$5 \mid a_n \ \wedge 5 \mid 5^n \implies 5 \mid \underbrace{(a_n + 5^n)}_{=7^n},$$

o que é um absurdo. Com feito, sendo 7 um número primo, 7^n é uma factorização em números primos e, portanto, os únicos divisores de 7^n são da forma 7^k para $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Conclusão: $m = 1$.

Assim sendo, para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tem-se $\text{mdc}(a_n, 5) = 1$, pelo que a fracção $\frac{a_n}{5}$ é irredutível.