UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002
Álgebra Linear I

26 de janeiro de 2012

- O exame é composto por **5** grupos de questões e respectivas alíneas, contém 9 página(s) e termina com a palavra **FIM**.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da prova, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- As questões do grupo **I** (escolha múltipla) deverão ser respondidas no enunciado. As questões dos grupos **II**, **III**, **IV** e **V** deverão ser respondidas no Caderno de Prova. Todos os cabeçalhos e espaços reservados à identificação, deverão ser preenchidos com letra legível. Utilize unicamente tinta azul ou preta.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Não serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas. Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Não é permitido o uso de máquina de calcular, nem de elementos de consulta.
- Tenha em atenção que o exame tem a duração máxima de **2 horas e 30 minutos**.

Critérios de avaliação e cotação

- Com excepção das questões do grupo **I** (escolha múltipla), é necessário justificar todas as respostas e apresentar os cálculos efectuados. A apresentação de valores numéricos, como resposta, sem qualquer justificação, mesmo que correctos, terão a cotação zero.
- Cada questão do grupo **I** (escolha múltipla) tem a cotação de 1 valor. Por cada resposta errada serão descontados $\frac{1}{3}$ valores. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação global mínima do grupo **I** é de 0 valores. As restantes questões terão as cotações seguintes:

II.	**III.**	**IV.**	**V.**
3.0 val.	4.0 val.	6.0 val.	3.0 val.

Nome: ....

N^0 de Estudante: ....   **B. I. n^0** ....

Turma ....   **Assinatura do Vigilante:** ....

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo. Caso pretenda anular alguma resposta, escreva "Anulado" junto a essa resposta e indique, se for caso disso, a que pretenda que seja considerada.

Questão 1

Sejam os subespaços de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\begin{aligned} F &= \langle (1,0,1,2),(0,2,0,4),(1,-1,1,0)\rangle \\ G &= \langle (0,1,0,2),(1,1,1,1)\rangle. \end{aligned}$$

Então:

☐ **a)** $\dim(F+G)=5$.

☐ **b)** $\dim F = 3$

☐ **c)** $\dim(F\cap G)=1$.

☐ **d)** $\dim(F\cap G)=0$.

Questão 2

Sejam $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ duas matrizes tais que $\det(A)=1, \det(B)=-1$. Então, tem-se sempre:

☐ **a)** $\det(A+B)=0$.

☐ **b)** $\det(AB^{-1})=\det A$.

☐ **c)** AB é invertível.

☐ **d)** $A-B$ não é invertível.

Questão 3

Considere as aplicações $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas pelas expressões $f(x,y)=(x-y,x+y)$, $g(u,v)=uv$. Então:

☐ **a)** $\operatorname{Nuc} f = \{(1,1)\}$.

☐ **b)** g é uma aplicação linear.

☐ **c)** f é sobrejetiva.

☐ **d)** 0 é valor próprio de f.

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... **B. I. n^0** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

Questão 4

Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha & 3 \\ 2 & 4 & \alpha \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $b_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ \alpha \\ 4 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$. Considere as afirmações seguintes:

(i) A é invertível se e só se $\alpha \neq 2$.

(ii) $\operatorname{rank} A_\alpha = 2$ se e só se $\alpha = 2$.

(iii) O sistema $A_\alpha \mathbf{x} = b_\alpha$ não tem soluções se $\alpha = 2$.

Então:

☐ **a)** Nenhuma das afirmações é verdadeira.

☐ **b)** Apenas uma das afirmações é verdadeira.

☐ **c)** Apenas duas das afirmações são verdadeiras.

☐ **d)** Todas as afirmações são verdadeiras.

Responda aos grupos seguintes no Caderno de Prova

Nos grupos seguintes justifique todas as afirmações apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Diga se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações nas alíneas a) e b) seguintes, justificando cuidadosamente a sua resposta através de uma demonstração ou de um contra-exemplo, consoante o que for apropriado.

a) Seja $T \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\dim\mathrm{Nuc}(T) = 0$. Então, o polinómio $p(x) = x^3 + x$ não pode ser o polinómio característico de T.

b) Considere os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$X = \langle (1,0,1), (0,-1,1) \rangle, \quad Y = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x+y+z=0 \right\}.$$

Então $X = Y$.

Nome: ....

N^0 de Estudante: .... **B. I. n^0** ....

Turma .... **Assinatura do Vigilante:** ....

III. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x + 5y - z = 3 \end{cases}$$

Utilizando o *método de eliminação de Gauss* e *indicando clara e pormenorizadamente todas as operações que efetuar,* discuta a resolubilidade deste sistema e, caso ele seja resolúvel, determine todas as suas soluções.

IV. Seja $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes 2×2 com elementos reais. Sejam

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e considere a transformação linear $t : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$t(M_1) = M_2, \quad t(M_2) = M_1, \quad t(M_3) = 0 = t(M_4).$$

a) Mostre que $\mathcal{B} = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ é uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Determine a matriz $\mathcal{M}(t, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, que representa t em relação à base $\mathcal{B}$ em ambos os espaços de partida e de chegada.

c) Sendo $\mathcal{B}' = \left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ a base canónica de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, determine $\mathcal{M}(t, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$.

d) Calcule os valores próprios de $\mathcal{M}(t, \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e os correspondentes subespaços próprios[1].

V. Seja $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma qualquer matriz $n \times n$ de elementos reais e considere a matriz $S = R^{\mathsf{T}} R$.

a) Mostre que S é uma matriz simétrica.

b) Prove que, para qualquer $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tem-se sempre $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} S \mathbf{x} \geqslant 0$.

c) Conclua que todos os valores próprios de S são números reais não-negativos.

FIM

---

[1]Se não resolveu a alínea IV.b) resolva esta alínea considerando a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

RESOLUÇÃO

Nas questões de escolha múltipla não era necessário a apresentação dos cálculos e justificações que se seguem, mas apenas a indicação da alínea correspondente à resposta correta. Em praticamente todas as alíneas há várias maneiras corretas de resolver a questão colocada e a que aqui se apresenta é apenas uma delas, e não necessariamente a mais curta.

I. 1. Comecemos por observar que, sendo F e G dois subespaços de $\mathbb{R}^4$, então $F+G$ será também um subespaço de $\mathbb{R}^4$, pelo que podemos excluir, à partida, a opção dada na alínea a). Vejamos o que podemos concluir quanto à dimensão de F. Construindo uma matriz que tem como linhas os vetores que geram F e usando a notação $U \xrightarrow[\ell_j \mapsto \ell_j+\beta\ell_k]{} V$ para dizer que V é obtida substituindo a linha ℓ_j de U por $\ell_j+\beta\ell_k$, pode-se escrever,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_3 \mapsto \ell_3-\ell_1 \\ \ell_2 \mapsto \frac{1}{2}\ell_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \mapsto \ell_3+\ell_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a dimensão de F é 2 e podemos eliminar a alínea b). Pelos cálculos anteriores concluimos que se pode escrever $F = \langle (1,0,1,2), (0,1,0,2) \rangle$, e, portanto, o vetor $(0,1,0,2)$ é comum ao conjunto dos geradores de F e de G. Isto implica que pelo menos o espaço vetorial (unidimensional) gerado por este vetor tem também de ser comum a F e a G, ou seja, tem de ser um subconjunto de $F \cap G$. Ou seja, podemos, por isto, *excluir* a alínea d). Por exclusão de partes, a alínea correta é a c).

2. Pelas propriedades gerais do determinante, sabemos que $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, pelo que, aplicando ao presente caso, $\det(AB) = 1 \times (-1) = -1 \neq 0$. Isto implica que AB é invertível. Conclui-se, assim, que a alínea correta é a c).

3. Claramente, g não é uma aplicação linear. Para concluir isto basta observar que $(u,v) = (u,0) + (0,v)$ mas (se $u, v \neq 0$)

$$g(u,v) = uv \neq 0 = 0 + 0 = g(u,0) + g(0,v).$$

Pode-se, portanto, eliminar a opção b), que era a única que se referia à aplicação g. Por outro lado, como $f(1,1) = (0,2) \neq (0,0)$, podemos eliminar também a hipótese a). Tomando a base canónica de $\mathbb{R}^2$ tem-se $f(1,0) = (1,1)$ e $f(0,1) = (-1,1)$, pelo que

$$\mathcal{M}(f, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinómio característico desta matriz é $p(\lambda) = \det(\mathcal{M}(f, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2) - \lambda I_2) = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. Aplicando a fórmula resolvente das equações polinomiais de segundo grau conclui-se que os zeros deste polinómio (que são os valores próprios da matriz $\mathcal{M}(f, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2, \mathrm{b.\,c.}\,\mathbb{R}^2)$) são $\lambda_{\pm} = 2 \pm 2i$. Portanto, podemos eliminar a hipótese d) e, por exclusão de partes, concluir que a opção correta é a c).

4. Aplicando eliminação de Gauss à matriz ampliada, podemos escrever (com a notação usada na questão 1. acima),

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 3 & \alpha \\ 2 & 4 & \alpha & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \mapsto \ell_3 - 2\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha-2 & 2 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \end{array}\right]$$

Conclui-se daqui que, A não é invertível se (e só se) $\alpha = 2$, pois nesse caso a matriz é equivalente por linhas a uma matriz com característica $r(A_2) = 2 < 3$. Aliás, o cálculo acima permite concluir que $r(A_\alpha) = 2$ se e só se $\alpha = 2$. Para além disto, observe-se que, se $\alpha = 2$, a matriz ampliada que se obteve acima permite concluir (pela segunda linha) que $2z = 0 \Leftrightarrow z = 0$, a última linha ($0z = 0$) não implica nenhuma restrição sobre z e a primeira reduz-se a $x + 2y = 2$, que, claramente, é uma equação com um número infinito de soluções. Portanto, o sistema $A_2\mathbf{x} = b_2$ tem soluções. Conclui-se, portanto, que a opção correta é a c): apenas duas das afirmações estão corretas.

II. a) A afirmação é verdadeira. Suponhamos que p é o polinómio característico de T. Então, T teria três valores próprios distintos, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = -i$. Portanto, designando por E_λ o espaço próprio correspondente ao valor próprio λ, ter-se-ia $\dim\mathrm{Nuc}(T) = \dim E_0 = 1$, o que contrariaria a hipótese de $\dim\mathrm{Nuc}(T) = 0$.

b) Podemos começar por observar que o vetor $(0, -1, 1)$ de X satisfaz a equação que define Y mas se $(x, y, z) = (1, 0, 1)$ tem-se $x + y + z = 1 + 0 + 1 = 2 \neq 0$, ou seja, o outro vetor gerador de X não está em Y. Consequentemente $X \not\subset Y$ e, portanto, também não se pode ter $X = Y$ (note-se que temos $X = Y$, se, e só se, tivermos, simultaneamente, $X \subset Y$ e $X \supset Y$). Portanto, a afirmação é falsa.

III. Com a notação já utilizada anteriormente, podemos escrever

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto \ell_2 - 3\ell_1 \\ \ell_3 \mapsto \ell_3 - 2\ell_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_3 \mapsto 2\ell_3 + 3\ell_2 \\ \ell_3 \mapsto -\frac{1}{25}\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{25} \end{array}\right]$$

Nesta altura, designando por A a matriz dos coeficientes do sistema e por b o vetor dos termos do membro direito do sistema dado, podemos concluir que, como o sistema tem dimensão 3 e $r(A) = r(A|b) = 3$, o sistema é possível e determinado, tendo, portanto, uma única solução. Para determinarmos essa solução podemos continuar a aplicar o método de Gauss-Jordan à última matriz acima até obtermos a matriz dos coeficientes na forma de uma matriz em escada reduzida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{25} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_3 \mapsto 2\ell_3+3\ell_2 \\ \ell_3 \mapsto -\frac{1}{25}\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{25} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto \ell_2+5\ell_3 \\ \ell_1 \mapsto \ell_1-2\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{21}{25} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{25} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto -\frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_1 \mapsto \ell_1-\ell_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{25} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{25} \end{array}\right],$$

pelo que a solução do sistema é $x = \frac{16}{25}$, $y = \frac{1}{5}$ e $z = -\frac{2}{25}$.

IV. a) Considerando o isomorfismo linear

$$i : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4,$$

concluiremos que $\mathcal{B}$ é uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se e só se $i(\mathcal{B})$ for uma base de $\mathbb{R}^4$. Como $i(\mathcal{B}) = \{i(M_1), i(M_2), i(M_3), i(M_4)\} = \{(1,0,1,1), (1,0,0,-1), (1,0,1,0), (0,1,0,0)\}$ Construindo uma matriz em que as linhas são os vetores $i(M_k)$ e transformando-a numa matriz em escada por operações sobre as linhas obtém-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto \ell_2-\ell_1 \\ \ell_3 \mapsto \ell_3-\ell_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \leftrightarrow \ell_4 \\ \ell_3 \leftrightarrow \ell_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

donde se conclui que $r = 4$ e, portanto, todos os vetores $i(M_k)$ são linearmente independentes (como elementos de $\mathbb{R}^4$) e consequentemente todas as matrizes M_k são linearmente independentes (como elementos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$) e $\mathcal{B}$ constitui uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Atendendo ao enunciado, sabemos que a ação de t sobre os elementos da base $\mathcal{B}$ é

$$\begin{aligned} t(M_1) &= 0 \cdot M_1 + 1 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4 \\ t(M_2) &= 1 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4 \\ t(M_3) &= 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4 \\ t(M_4) &= 0 \cdot M_1 + 0 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4, \end{aligned}$$

pelo que se conclui que

$$\mathcal{M}(t, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Atendendo à ação de t sobre as matrizes M_k e tendo em conta que t é uma aplicação linear, tem-se

$$\begin{aligned}
t(E_1)+t(E_3)+t(E_4) &= t(E_1+E_3+E_4) = t(M_1) = M_2 = E_1-E_4 && (1)\\
t(E_1)-t(E_4) &= t(E_1-E_4) = t(M_2) = M_1 = E_1+E_3+E_4 && (2)\\
t(E_1)+t(E_3) &= t(E_1+E_3) = t(M_3) = 0 && (3)\\
t(E_2) &= t(M_4) = 0. && (4)
\end{aligned}$$

Subtraindo a equação (3) da equação (1) obtém-se $t(E_4) = E_1 - E_4$. Substituindo este valor na equação (2) conclui-se que $t(E_1) = E_1+E_3+E_4+(E_1-E_4) = 2E_1+E_3$ e substituindo este valor na equação (3) obtém-se $t(E_3) = -2E_1 - E_3$. Utilizando estes resultados e a equação (4) pode-se escrever

$$\begin{aligned}
t(E_1) &= 2\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + 1\cdot E_3 + 0\cdot E_4\\
t(E_2) &= 0\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + 0\cdot E_3 + 0\cdot E_4\\
t(E_3) &= (-2)\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + (-1)\cdot E_3 + 0\cdot E_4\\
t(E_4) &= 1\cdot E_1 + 0\cdot E_2 + 0\cdot E_3 + (-1)\cdot E_4,
\end{aligned}$$

pelo que se conclui que

$$\mathcal{M}(t,\mathcal{B}',\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

d) Relembrando a matriz obtida na alínea b) e sabendo que os valores próprios de uma matriz são as raízes do seu polinómio característico, pode-se começar por calcular este polinómio:

$$p(\lambda) = \det(\mathcal{M}(t,\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda I_4) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2-1)\lambda^2.$$

Portanto, os valores próprios de $\mathcal{M}(t,\mathcal{B},\mathcal{B})$ são $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ (ou seja, o valor próprio igual a zero tem multiplicidade algébrica igual a 2. Calculemos os correspondentes subespaços próprios, ou seja, os subespaços $\mathrm{Nuc}(\mathcal{M}(t,\mathcal{B},\mathcal{B}) - \lambda I_4)$.

- Para $\lambda_1 = 1$ o subespaço próprio correspondente é constituido pelos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_1+u_2\\ u_1-u_2\\ -u_3\\ -u_4 \end{bmatrix},$$

ou seja, são os vetores cujas componentes satisfazem $u_2 = u_1$ e $u_3 = u_4 = 0$. Portanto, o subespaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda_1 = 1$ é

$$E_1 = \left\langle (1,1,0,0)^\mathsf{T} \right\rangle.$$

- Para $\lambda_2 = -1$ o subespaço próprio correspondente é constituido pelos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},$$

ou seja, são os vetores cujas componentes satisfazem $u_2 = -u_1$ e $u_3 = u_4 = 0$. Portanto, o subespaço próprio correspondente ao valor próprio $\lambda_1 = -1$ é

$$E_{-1} = \left\langle (1, -1, 0, 0)^\mathsf{T} \right\rangle.$$

- Finalmente, para o valor próprio nulo o subespaço próprio correspondente é constituido pelos vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$ tais que

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, são os vetores cujas componentes satisfazem $u_1 = u_2 = 0$ e que não têm restrições nos valores de u_3 nem de u_4. Portanto, o subespaço próprio correspondente ao valor próprio nulo é

$$E_0 = \left\langle (0, 0, 1, 0)^\mathsf{T}, (0, 0, 0, 1)^\mathsf{T} \right\rangle.$$

V. a) A matriz S é simétrica se e só se $S^\mathsf{T} = S$. Portanto, atendendo a que $(XY)^\mathsf{T} = Y^\mathsf{T} X^\mathsf{T}$ e $(X^\mathsf{T})^\mathsf{T} = X$ e tendo em conta a definição de S, tem-se $S^\mathsf{T} = (R^\mathsf{T} R)^\mathsf{T} = R^\mathsf{T} (R^\mathsf{T})^\mathsf{T} = R^\mathsf{T} R = S$, pelo que se conclui que S é uma matriz simétrica.

b) Pela definição de S tem-se

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} S \mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T} R^\mathsf{T} R \mathbf{x} = (\mathbf{x}^\mathsf{T} R^\mathsf{T})(R\mathbf{x}) = (R\mathbf{x})^\mathsf{T}(R\mathbf{x}).$$

Agora, denotando por r_{ij} os elementos da matriz R e por x_j as componentes do vetor $\mathbf{x}$, podemos escrever

$$R\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{1j} x_j \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{2j} x_j \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_{nj} x_j \end{bmatrix}$$

e portanto

$$(R\mathbf{x})^\mathsf{T}(R\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j \right)^2 \geqslant 0$$

c) Recordemos que λ é um valor próprio de S se e só se existe um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $S\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Seja λ um qualquer valor próprio de S e $\mathbf{x}$ um correspondente vetor próprio. Então, multiplicando à esquerda por $\mathbf{x}^\mathsf{T}$ ambos os membros da igualdade $S\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ obtém-se $\mathbf{x}^\mathsf{T}S\mathbf{x} = \mathbf{x}^\mathsf{T}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}$. Agora, se $\mathbf{x}$ é um vetor não-nulo (i.e., pelo menos uma das suas componentes é diferente de zero) tem-se

$$\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x} = (x_1, \ldots x_n)\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0,$$

e, portanto, atendendo a que, pela alínea anterior, sabemos que $\mathbf{x}^\mathsf{T}S\mathbf{x} \geqslant 0$. Concluimos que $\lambda = \frac{\mathbf{x}^\mathsf{T}S\mathbf{x}}{\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{x}} \geqslant 0$, o que prova o pretendido.