Resolução do efólio A

Álgebra Linear I **Código:** 21002

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando × no quadrado respetivo.

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Então:

☒ **a)** $AA^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ **b)** $CA = A^2$.

☐ **c)** $AB = BA$.

☐ **d)** $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ -5 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema de equações que corresponde a esta matriz é:

☐ **a)** $\begin{cases} -2x + 3y - z + w = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

☐ **b)** $\begin{cases} -2x + 3y + z = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ w = 0 \end{cases}$

☒ **c)** $\begin{cases} -2x + 3y - z = 3 \\ -5x + 4y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$

☐ **d)** $\begin{cases} -2x + 3y - z = 3 \\ 5x = 4y \\ x = 0 \end{cases}$

3. Duas matrizes A e B pertencentes a $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ dizem-se *semelhantes* se existe uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$.

Se A e B são matrizes semelhantes, então:

☐ **a)** $A^2 = B^2$

☒ **b)** $\det\left(A^2\right) = \det\left(B^2\right)$

☐ **c)** $A - B = I_n$

☐ **d)** $\det A = -\det B$

4. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Então:

☐ **a)** $\operatorname{tr} A = 3$

☐ **b)** $3 + \operatorname{tr} A = \det A$

☒ **c)** $\det(-A) = -\det A$

☐ **d)** $\det\left(A^3\right) = 3 \det A$

(Nota: O traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal, neste caso $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{3} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$)

> Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss*, determine se a matriz

$$Q = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível, e no caso afirmativo, calcule Q^{-1} usando o *Método de Eliminação de Gauss-Jordan* aplicado à matriz $[Q|I_4]$.

III. Utilizando o *Teorema de Laplace* calcule o valor de

$$\det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

IV. Uma matriz quadrada diz-se uma *matriz de permutação* se cada coluna e cada linha tiverem uma entrada igual a 1 e as restantes iguais a 0.

a) Dê um exemplo de uma matriz de permutação A, 3×3, que seja diferente de I_3.

b) Verifique que dada uma matriz qualquer B, 3×3, a matriz AB procede a uma permutação das linhas de B e a matriz BA resulta de B por uma permutação das suas colunas.

c) Verifique que a matriz A é invertível, tendo por inversa a sua transposta.

V. Se $P \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ verifica $P^\top P = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$, designa-se a matriz $H = I_n - 2PP^\top$ por *matriz de Householder* associada a P.

a) (i.) Seja $P^\top = \begin{bmatrix} 1/6 & 3/4 & 5/12 & 1/4 & 5/12 \end{bmatrix}$. Calcule a matriz de Householder H, associada a P.

(ii.) Verifique que H é uma matriz simétrica, e que $H^\top H = I_5$.

b) Mostre que se H é uma matriz de Householder então H é uma matriz simétrica e $H^\top H = I_n$.

VI. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$x^\top Ax = 0 \;\forall x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \iff A^\top = -A.$$

FIM

Grupo I.

1.

$$\text{Temos } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e portanto } A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow AA^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

e portanto a alínea a) é a opção correta. Em relação às outras alíneas, como C é uma matriz 3×2, e A é uma matriz 2×2, então CA é uma matriz 3×2 e portanto não pode ser igual a A^2 que é uma matriz 2×2.

Para a alínea c) tem-se $AB = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $BA = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e portanto $AB \neq BA$.

Para a alínea d) tem-se $A + B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, o que confirma que a única alínea verdadeira era a alínea a).

2. Supondo que a solução do sistema que corresponde a esta matriz aumentada era uma matriz coluna 4×1 designada por $[x\ y\ z\ w]^\top$, então o facto de a 4^{a} coluna da matriz ser composta unicamente por zeros sugere que o coeficiente da componente w seja zero em todas as equações. Podemos assim eliminar as 2 primeiras opções.

A segunda equação da opção d) não está certa, pois $5x = 4y$ não é equivalente a $-5x+4y = 1$.

A única opção que sobra está correta.

3. No caso em que a única informação que temos acerca de uma matriz é a sua dimensão, a melhor maneira de testar as várias hipóteses é considerar eventuais contra-exemplos particularmente simples, como a matriz nula, ou a matriz identidade. Para este caso podemos também ver o que se passa para o caso (muito) particular $B = A$, que correspondem a matrizes trivialmente semelhantes (porquê?).

Assim ao considerarmos $B = A$ podemos desde já eliminar as opções c) (pois $B = A$ implica $A-B = 0 \neq I_n$), e d) (pois $B = A$ implica $\det A = \det B$).

Vejamos que a alínea certa é a alínea b).

Como $B = P^{-1}AP$, então por definição $B^2 = \left(P^{-1}AP\right)^2 = P^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AAP = P^{-1}A^2P$, e portanto

$$\begin{aligned}\det(B^2) &= \det(P^{-1}A^2P) = \det(P^{-1})\det(A^2)\det P = \det(A^2)\det P^{-1}\det P \\ &= \det(A^2)\det(P^{-1}P) = \det(A^2)\det I_n = \det(A^2).\end{aligned}$$

Para mostrar que a alínea a) não está correta basta obter um contra-exemplo. Consideremos a matriz $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ e vamos escolher para matriz P uma matriz elementar de troca de linhas. Assim quando multiplicarmos à esquerda por P^{-1} trocamos as colunas de A e depois ao multiplicarmos à direita por P trocamos as linhas, obtendo-se $B = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Temos assim um exemplo de 2 matrizes semelhantes tais que $A^2 \neq B^2$, pois $A^2 = A \neq B = B^2$.

4. Escolhendo para A a matriz nula de ordem 3 (0_3), podemos logo eliminar as 2 primeiras opções, pois como $\operatorname{tr} 0_3 = 0 = \det 0_3$, teriamos $0 = 3$.

Escolhendo $A = I_3$ na alínea d) tem-se $\det A^3 = \det I_3 = 1$ e $3 \det A = 3 \det I_3 = 3$, e portanto esta alínea também não é a correta.

Sobra então a alínea c). Como temos uma matriz 3×3, $\det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$, como queriamos mostrar.

Grupo II.

Embora seja possível resolver o exercício sem efectuar trocas de linhas, neste caso é bastante mais simples trocar as linhas 1 e 4, pois evita fazer contas com fracções. Aplicando o *Método de Eliminação de Gauss* obtem-se

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \\ l_4 - 4l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_1 + l_3 \\ l_2 - 2l_3 \\ l_4 - 3l_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1 + l_2 \\ -l_3 \\ l_4 - 2l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_1 + l_4 \\ -l_2 \\ -l_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que temos 4 pivots e Q é de ordem 4, a matriz Q é invertível.

Como obtivemos a matriz identidade I_4 no final da eliminação de Gauss, já sabemos que se aplicarmos exatamente as mesmas transformações à matriz ampliada $[Q|I_4]$ então vamos obter $[I_4|Q^{-1}]$.

Começando com $[Q|I_4]$ tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \longleftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 - 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \\ l_4 - 4l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1 + l_3 \\ l_2 - 2l_3 \\ l_4 - 3l_3}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 + l_2 \\ -l_3 \\ l_4 - 2l_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1+l_4\\-l_2\\-l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] = [I_4|Q^{-1}].$$

E portanto $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Grupo III.

Para utilizarmos o Teorema de Laplace é conveniente escolher uma linha (ou coluna) com o maior números de zeros possível. Neste caso vamos optar pela última linha (mas o trabalho envolvido é semelhante ao que obteríamos optando pela última coluna).

Utilizando a última linha temos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{l_6}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-1)^{4+6}\cdot(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{6+6}\cdot(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Calculando agora cada um destes determinantes de ordem 5 tem-se, desenvolvendo o primeiro pela última coluna e o segundo pela quarta coluna:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0\\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \underset{c_5}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (-1)^{4+5}\cdot(-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1\\ -1 & 3 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \underset{c_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}}$$

$$\overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_1}{=}} 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2(18 + (-3) - (2)) + (-6 - 2) + (-2 - 5) = 26 - 15 = 11,$ e para o 2º determinante de ordem 5

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_4}{=}} (-1)^{3+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^{5+4} \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Reparando que o segundo destes determinantes de ordem 4 é igual a 11, pois já foi calculado, resta-nos calcular 2 determinantes de ordem 4.

Para o primeiro, tem-se

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} - \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(16 + (-4) - 4) + (-3) = -11.$$

Para o terceiro, tem-se

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{c_1}{=}} 2\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-6) + (2 - 1) = -11.$$

Juntando agora as parcelas todas obtem-se:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(11) + ((-11) + 3 \cdot (11) + (-11)) = -33 + 33 = 0.$$

Grupo IV.

a) Um exemplo simples consiste em trocar 2 linhas (ou colunas) à matriz I_3, por exemplo trocando as 2 primeiras linhas entre si obtem-se a matriz de permutação

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Dada uma matriz

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \text{ tem-se } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{e } BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{11} & b_{13} \\ b_{22} & b_{21} & b_{23} \\ b_{32} & b_{31} & b_{33} \end{bmatrix}, \text{ confirmando-se assim que a}$$

matriz AB procede a uma permutação das linhas de B, neste caso a primeira e a segunda, e a matriz BA resulta de B por uma permutação das suas colunas (neste caso a primeira e a segunda).

c) Uma vez que A resulta de I_3 por uma única troca de linhas, já sabemos que $\det A = -\det I_3 = -1 \neq 0$, e portanto A é invertível; como neste caso A é simétrica concluimos que é a sua própria inversa, o que podemos confirmar:

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3, \text{ e portanto } A = A^\top = A^{-1}.$$

Grupo V.

a) (i.) Como $P^\top = \begin{bmatrix} 1/6 & 3/4 & 5/12 & 1/4 & 5/12 \end{bmatrix}$, de modo a simplificar os cálculos vamos escrever $P^\top = 1/12 \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$. Vamos começar por verificar que $[P^\top P] = 1$. Tem-se

$$P^\top P = 1/12 \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times 1/12 \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 1/144(4 + 81 + 25 + 9 + 25) = 1/144 \times 144 = 1.$$

Para calcular a matriz de Householder H, associada a P, vamos começar por calcular a matriz $PP^\top$. Tem-se

$$PP^\top = {}^1\!/\!{}_{12} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \times {}^1\!/\!{}_{12} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 & 3 & 5 \end{bmatrix} \times = {}^1\!/\!{}_{144} \begin{bmatrix} 4 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 81 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \end{bmatrix}.$$

E portanto tem-se

$$H = I_5 - 2P^\top P = I_5 - {}^2\!/\!{}_{144} \begin{bmatrix} 4 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 81 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \end{bmatrix} = {}^1\!/\!{}_{72} \left(72I_5 - \begin{bmatrix} 4 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 81 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & 9 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & 25 \end{bmatrix} \right),$$

ou seja

$$\begin{aligned} H &= {}^1\!/\!{}_{72} \begin{bmatrix} 72-4 & -18 & -10 & -6 & -10 \\ -18 & 72-81 & -45 & -27 & -45 \\ -10 & -45 & 72-25 & -15 & -25 \\ -6 & -27 & -15 & 72-9 & -15 \\ -10 & -45 & -25 & -15 & 72-25 \end{bmatrix} \\ &= {}^1\!/\!{}_{72} \begin{bmatrix} 68 & -18 & -10 & -6 & -10 \\ -18 & -9 & -45 & -27 & -45 \\ -10 & -45 & 47 & -15 & -25 \\ -6 & -27 & -15 & 63 & -15 \\ -10 & -45 & -25 & -15 & 47 \end{bmatrix} \\ &= -{}^1\!/\!{}_{72} \begin{bmatrix} -68 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 9 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & -47 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & -63 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & -47 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(ii.) H é uma matriz simétrica pois é igual à sua transposta, ou seja é simétrica em relação à sua diagonal principal (tem-se $H_{ij} = H_{ji}$), em particular como H é simétrica tem-se

$H = H^\top$ e portanto que $H^\top H = H^2$, e basta vermos que $H^2 = I_5$. Tem-se

$$\begin{aligned}
H^2 &= \frac{1}{72^2}\begin{bmatrix} -68 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 9 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & -47 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & -63 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & -47 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -68 & 18 & 10 & 6 & 10 \\ 18 & 9 & 45 & 27 & 45 \\ 10 & 45 & -47 & 15 & 25 \\ 6 & 27 & 15 & -63 & 15 \\ 10 & 45 & 25 & 15 & -47 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{72^2}\begin{bmatrix} 5184 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5184 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5184 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5184 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5184 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= I_5.
\end{aligned}$$

No efólio era necessário apresentar as contas (se não para todas, pelo menos para uma coluna, ou uma linha) para justificar que $H^2 = I_5$; podiam confirmar as vossas contas utilizando as calculadoras matriciais disponíveis *online*.

b) Vejamos agora no caso geral que se H é uma matriz de Householder então H é uma matriz simétrica. Usando as propriedades da transposta tem-se

$$H^\top = (I_n - 2PP^\top)^\top = I_n^\top - 2(PP^\top)^\top = I_n - 2(P^\top)^\top P^\top = I_n - 2PP^\top = H,$$

ou seja $H^\top = H$ e portanto H é uma matriz simétrica.

Vejamos agora que $H^\top H = I_n$. Tem-se

$$\begin{aligned}
H^\top H &= H^2 \\
&= (I_n - 2PP^\top)^2 = (I_n - 2PP^\top)(I_n - 2PP^\top) \\
&= I_n^2 - 2I_nPP^\top - 2PP^\top I_n + 4PP^\top PP^\top \\
&= I_n - 4PP^\top + 4P\underbrace{(P^\top P)}_{=[1]}P^\top = I_n - 4PP^\top + 4PP^\top \\
&= I_n.
\end{aligned}$$

Em termos de dimensões de matrizes, não devemos esquecer que P não é uma matriz quadrada! Assim, como P é uma matriz $n \times 1$ e $P^\top$ é uma matriz $1 \times n$, podemos efetuar o produto $P[1]P^\top$ que corresponde ao produto de 3 matrizes $(n \times 1)(1 \times 1)(1 \times n)$ sendo o resultado uma matriz $n \times n$, neste caso $PP^\top$.

Esta demonstração que fizemos para o caso geral, é obviamente válida para a primeira alínea, e com muito menos contas!

Grupo VI. Neste grupo tinhamos de provar uma equivalência, e vamos tratar cada uma das implicações separadamente.

Vamos provar que se $A^\top = -A$ então $x^\top Ax = 0$ para todo o $x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$. Podemos começar por observar que como $x^\top Ax$ é uma matriz 1×1, ou seja um número real, então vai ser igual à sua transposta (porquê?), e portanto tem-se

$$x^\top Ax = \left(x^\top Ax\right)^\top = x^\top A^\top \left(x^\top\right)^\top = x^\top A^\top x\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})\,,$$

e portanto no caso em que $A^\top = -A$ temos então que

$$x^\top Ax = x^\top A^\top x = x^\top(-A)x = -x^\top Ax\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}),$$

ou seja $x^\top Ax = -x^\top Ax\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$, o que equivale a $2x^\top Ax = 0\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$. Provámos portanto que $A^\top = -A \Rightarrow x^\top Ax = 0\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$.

A outra implicação consiste em provar que $x^\top Ax = 0\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}) \Rightarrow A^\top = -A$.

Um aspeto essencial é a utilização do quantificador universal na primeira parte desta implicação, pois é esse quantificador que nos vai permitir provar que a matriz A é anti-simétrica. Calculando $x^\top Ax = 0$ para um $x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ genérico e uma matriz A $n \times n$ genérica, chegamos a uma única equação com as n componentes de x e as n^2 componentes de A.

$$x^\top Ax = [x_1\, x_2\, \cdots\, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [\sum_{i=1}^n x_i a_{i1}\, \sum_{i=1}^n x_i a_{i2} \ldots \sum_{i=1}^n x_i a_{in}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= x_1 \sum_{i=1}^n x_i a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^n x_i a_{i2} + \cdots + x_n \sum_{i=1}^n x_i a_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = 0\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{1}$$

É claro que a partir destas equações, tal como estão, não podemos concluir nada! Mas como temos um quantificador universal, isso significa que posso escolher o x que me der mais jeito! Por exemplo se escolher $x = [1\,0\,0\ldots0]$, ou seja $x_1 = 1$ e $x_j = 0$ para $j \neq 1$ e substituir em (1) obtemos

$$\sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n x_i a_{ij} = \sum_{j=1}^1 x_j \sum_{i=1}^1 x_i a_{ij} = {x_1}^2 a_{11} = a_{11} = 0.$$

Se escolher x tal que todas as suas componentes são iguais a 0, com exceção da componente k então posso concluir que o único termo não nulo da soma é o que envolve a_{kk} e portanto $a_{kk} = 0$, e isto para qualquer k entre 2 e n. Ou seja concluimos que todos os elementos da diagonal principal da matriz A são nulos.

E para os outros elementos da matriz? Por exemplo, sabemos que para uma matriz anti-simétrica é necessário que $a_{21} = -a_{12}$, e olhando para o somatório anterior, vemos que as *únicas* componentes de x associadas a a_{12} e a a_{21} são x_1 e x_2, e mais geralmente vemos que as *únicas* componentes de x associadas a a_{ij} e a a_{ji} são x_i e x_j.

Escolhendo $x = [1\,1\,0 \cdots 0]$ e substituindo em (1) obtemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} &= \sum_{j=1}^{2} x_j \sum_{i=1}^{2} x_i a_{ij} = x_1 \sum_{i=1}^{2} x_i a_{i1} + x_2 \sum_{i=1}^{2} x_i a_{i2} \\ &= x_1(x_1 a_{11} + x_2 a_{21}) + x_2(x_1 a_{12} + x_2 a_{22}) = x_1 x_2 (a_{12} + a_{21}) \\ &= a_{12} + a_{21}\,,\ \text{pois } a_{11} = a_{22} = 0 \\ &= a_{12} + a_{21} = 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Da equação (2) concluimos que $a_{21} = -a_{12}$.

Mais geralmente escolhendo x tal que todas as suas componentes são iguais a 0, com exceção das componente t e s (com $t \neq s$) que são iguais a 1, tem-se

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} &= x_s \sum_{i=1}^{n} x_i a_{is} + x_t \sum_{i=1}^{n} x_i a_{it} = x_s(x_s a_{ss} + x_t a_{ts}) + x_t(x_s a_{st} + x_t a_{tt}) \\ &= 1(1 \cdot 0 + 1 a_{ts}) + 1(1 a_{st} + 1 \cdot 0) \\ &= a_{ts} + a_{st}\,,\ \text{pois } a_{ss} = a_{tt} = 0 \\ &= a_{ts} + a_{st} = 0. \qquad (3)\end{aligned}$$

Tal como anteriormente da equação (3) concluimos que $a_{st} = -a_{ts}, \forall t, s = 1, \ldots, n$ para $t \neq s$.

Provámos assim que $x^\top A x = 0\,, \forall x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ implica que $a_{ij} = -a_{ji}, \forall i, j = 1, \ldots, n$, o que equivale a $A^\top = -A$.