UNIVERSIDADE ABERTA
www.uab.pt

Ministério da Educação e Ciência

U.C. 21002 — Álgebra Linear I
Atividade Formativa 2

I. Questões de escolha múltipla.

Em cada questão de escolha múltipla apenas uma das afirmações a), b), c), d) é verdadeira. Indique-a marcando $\times$ no quadrado respectivo.

1. Seja $F = \Big((2,2,-1),(2,-1,2),(-1,2,2),(1,1,1)\Big)$ uma sequência de vetores em $\mathbb{R}^3$. Então:

- ☐ **a)** F é um conjunto gerador, mas não é uma base, de $\mathbb{R}^3$
- ☐ **b)** F é uma base de $\mathbb{R}^3$, distinta da base canónica.
- ☐ **c)** F é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ **d)** $\dim\langle(2,2,-1),(2,-1,2),(-1,2,2),(1,1,1)\rangle = 4$.

2. Seja $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz com característica 3 e seja $\mathcal{C}(A)$ o seu espaço das colunas. Então, o sistema $AX = B$

- ☐ **a)** é possível se e só se $B = 0$,
- ☐ **b)** é possível se e só se $B \in \mathcal{C}(A)$,
- ☐ **c)** é sempre possível, qualquer que seja $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$,
- ☐ **d)** é sempre impossível, qualquer que seja $B \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$,

3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por $f(x,y,z) = (x+y, y+z, z+x)$. Então, $\mathcal{M}(f; \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3}, \text{b. c.}_{\mathbb{R}^3})$ é a matriz

- ☐ **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ **d)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

4. Seja $p_S(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ o polinómio característico de uma matriz S. Então:

☐ **a)** os valores próprios de S são -1, 0 e 1.

☐ **b)** os valores próprios de S são 0 e 1.

☐ **c)** todos os valores próprios de S têm multiplicidade algébrica igual a 2.

☐ **d)** a matriz S pode não ter valores próprios.

Nos grupos seguintes justifique todas as suas respostas apresentando os raciocínios e os cálculos que efetuou para as obter.

II. Designando por (α_n) a sucessão real cujos elementos são α_n, definem-se a soma de duas sucessões e o produto de uma sucessão por um escalar real do modo seguinte:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$\lambda \cdot (x_n) = (\lambda \cdot x_n),$$

Seja X o conjunto de todas as sucessões reais (α_n) que satisfazem, $\forall n \geqslant 3$, $\alpha_n = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$.

a) Mostre que X, munido das operações sobre sucessões, é um espaço vetorial.

b) Determine a dimensão e uma base de X.

III. Mostre que qualquer das duas sequências $\mathcal{B} = \big((-1,1,0),(2,0,1),(0,1,1)\big)$ e $\widetilde{\mathcal{B}} = \big((1,-1,0),(1,0,1),(1,2,0)\big)$, é uma base de $\mathbb{R}^3$. Determine as matrizes de mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\widetilde{\mathcal{B}}$ e de $\widetilde{\mathcal{B}}$ para $\mathcal{B}$.

IV. Considere a transformação $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida por $T(f) = f' + f$, onde f' representa a derivada do polinómio f.

a) Mostre que T é uma aplicação linear.

b) Sendo $\mathcal{D}$ uma base de $\mathbb{R}_2[x]$ à sua escolha, determine a matriz $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})$.

c) Determine as dimensões da imagem e do núcleo de T.

d) Investige se T é invertível e, caso seja, calcule a sua inversa, T^{-1}.

V. Considere a aplicação linear $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $R(x,y) = (x-y, x+y)$. Esboce geometricamente os conjuntos Q e $R(Q)$, onde $Q = [0,1]\times[0,1]$. Recorrendo apenas ao esboço e a argumentos geométricos diga, justificando, se espera que a aplicação R possa ter algum valor próprio real.

VI. Considere a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine os valores e vetores próprios de A e conclua que A é diagonalizável. Utilizando este resultado, calcule A^5.

FIM

RESOLUÇÃO

As resoluções que se seguem são feitas com algum detalhe, por vezes maior do que o que seria necessário apresentar para ter a cotação completa numa resposta típica de um estudante. Pretende-se, deste modo, que estas resoluções possam constituir materiais de aprendizagem úteis. Em particular, nas questões de escolha múltipla, para as quais apenas seria necessário escolher a opção correta, apresentam-se, também, os raciocínios e/ou cálculos necessários à sua obtenção.

I. 1. Podemos começar por observar que, como sabemos que qualquer base de $\mathbb{R}^3$ tem apenas três elementos e F tem quatro vetores, podemos imediatamente eliminar as opções b) e c). Por outro lado, a dimensão de um (sub)espaço vetorial gerado por combinação linear de (alguns) vetores de $\mathbb{R}^3$ nunca pode ser superior à dimensão do espaço completo, ou seja, 3. Portanto, por exclusão de partes e sem necessidade de efetuar qualquer cálculo, concluímos que a opção correta é a alínea a).

2. Designemos por A_j, $j = 1, 2, 3$, as colunas da matriz A e escrevamos $A = [A_1|A_2|A_3]$. Sendo $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathsf{T}}$, podemos escrever AX como $x_1A_2 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4$. Consequentemente, qualquer B que seja igual a AX terá de ser um vetor obtido por combinação linear das colunas de A (ou seja, terá de pertencer ao espaço das colunas de A) e, reciprocamente, qualquer combinação linear das colunas de A fornece um vetor B (que é igual ao resultado dessa combinação linear, o qual pode ser escrito como AX). Isto permite concluir que a opção correta é a alínea b).

3. Calculemos os valores de f na base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,1) = 1\cdot(1,0,0) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1)\\ f(0,1,0) &= (1,1,0) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(0,0,1)\\ f(0,0,1) &= (0,1,1) = 0\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 1\cdot(0,0,1) \end{aligned}$$

Pelos resultado estudados, a matriz pretendida tem por primeira coluna os coeficientes de $f(1,0,0)$, etc., ou seja, tem-se

$$\mathcal{M}(f; \mathrm{b.\,c.}_{\mathbb{R}^3}, \mathrm{b.\,c.}_{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pelo que a opção correta é a alínea a).

4. Sendo $p_S(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1)$ o polinómio característico de uma matriz S sabemos que os valores próprios de S são os zeros de p_S. Portanto, os valores próprios de S são -1, 0 e 1, e a resposta correta é a alínea a).

II. a) Comecemos por mostrar que o conjunto de *todas* as sucessões reais, munido das operações dadas no enunciado, é um espaço vetorial. É fundamental atentar na distinção entre uma sucessão real, (α_n), e os elementos (ou termos) dessa sucessão, α_n, os quais são números reais, para os quais assumimos válidas as propriedades usuais da adição e multiplicação[1].

[1]Estas operações sobre reais serão denotadas a vermelho, as operações definidas no enunciado, envolvendo sucessões, estarão escritas a preto.

O que necessitamos fazer para provar que o conjunto de todas as sucessões é um espaço vetorial é provar que as propriedades operativas da adição e da multiplicação (externa) são as que definem um espaço vetorial. Vejamos:

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & (u_n)+(v_n)=(u_n+v_n)=(v_n+u_n)=(v_n)+(u_n) \\
(A_2) & \big((u_n)+(v_n)\big)+(w_n)=(u_n+v_n)+(w_n)=(u_n+v_n+w_n) \\
 & \qquad =(u_n)+(v_n+w_n)=(u_n)+\big((v_n)+(w_n)\big) \\
(A_3) & (u_n)+(0_n)=(u_n+0_n)=(u_n)=(0_n+u_n)=(0_n)+(u_n) \\
 & \text{[onde } (0_n)=(0,0,0,\ldots) \text{ é a sucessão cujos termos são todos nulos.]} \\
(A_4) & (u_n)+(-u_n)=(u_n+[-u_n])=(0_n) \\
(M_1) & \alpha\big((u_n)+(v_n)\big)=\alpha(u_n+v_n)=(\alpha\cdot[u_n+v_n]) \\
 & \qquad =(\alpha\cdot u_n+\alpha\cdot v_n)=(\alpha u_n)+(\alpha v_n) \\
 & \qquad =\alpha(u_n)+\alpha(v_n) \\
(M_2) & \alpha\big((u_n)+(v_n)\big)=\alpha(u_n+v_n)=(\alpha\cdot[u_n+v_n]) \\
 & \qquad =(\alpha\cdot u_n+\alpha\cdot v_n)=(\alpha\cdot u_n)+(\alpha\cdot v_n) \\
 & \qquad =\alpha(u_n)+\alpha(v_n) \\
(M_3) & (\alpha\cdot\beta)(u_n)=\big((\alpha\cdot\beta)\cdot u_n\big)=\big(\alpha\cdot(\beta\cdot u_n)\big)=\alpha(\beta(u_n)) \\
(M_4) & 1\cdot(u_n)=(1\cdot u_n)=(u_n).
\end{array}
$$

Portanto o conjunto de todas as sucessões reais munido das operações definidas no enunciado é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Portanto, para responder à questão colocada, é agora suficiente verificar que, se $(u_n),(v_n)\in X$, então todas as combinações lineares de (u_n) e (v_n) estão também em X. Para isto basta-nos verificar que quer $\lambda(u_n)$, quer $(u_n)+(v_n)$ estão em X. Seja $(u_n)\in X$, então $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ e, portanto, $\lambda u_n=\lambda u_{n-1}+\lambda u_{n-2}$, pelo que também $\lambda(u_n)\in X$; por outro lado, se (u_n) e (v_n) estão em X, então o termo geral da sucessão soma $((u+v)_n)$ satisfaz

$$
\begin{aligned}
(u+v)_n &= u_n+v_n \\
&= u_{n-1}+u_{n-2}+v_{n-1}+v_{n-2} \\
&= u_{n-1}+v_{n-1}+u_{n-2}+v_{n-2} \\
&= (u+v)_{n-1}+(u+v)_{n-2},
\end{aligned}
$$

pelo que $((u+v)_n)$ também pertence a X. Isto mostra que X é um subespaço vetorial do espaço de todas as sucessões e, portanto, também é, ele próprio, um espaço vetorial.

b) Seja $\alpha=(\alpha_n)\in X$ arbitrário. Então,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7,\ldots) \\
&= (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+2\alpha_2,2\alpha_1+3\alpha_2,3\alpha_1+5\alpha_2,5\alpha_1+8\alpha_2,\ldots) \\
&= (\alpha_1,0,\alpha_1,\alpha_1,2\alpha_1,3\alpha_1,5\alpha_1,\ldots)+(0,\alpha_2,\alpha_2,2\alpha_2,3\alpha_2,5\alpha_2,8\alpha_2,\ldots) \\
&= \alpha_1(1,0,1,1,2,3,5,\ldots)+\alpha_2(0,1,1,2,3,5,8,\ldots),
\end{aligned}
$$

e como $\forall\beta\in\mathbb{R},(1,0,1,1,2,3,5,\ldots)\neq\beta(0,1,1,2,3,5,8,\ldots)$, e as constantes reais α_1 e α_2 são reais arbitrárias, concluímos que X é um espaço vetorial de dimensão dois e que uma base de X é dada pela sequência $\big((1,0,1,1,2,3,5,\ldots),(0,1,1,2,3,5,8,\ldots)\big)$.

III. Para provar que qualquer das sequências dadas é uma base de $\mathbb{R}^3$ é necessário mostrar que cada uma das sequências $\mathcal{B}$ e $\widetilde{\mathcal{B}}$ é constituida por três vetores linearmente independentes. Para tal é suficiente provar que as características das matrizes cujas linhas (ou colunas) são os vetores constituintes de $\mathcal{B}$, chamemos-lhe B, e de $\widetilde{\mathcal{B}}$, chamemos-lhe $\widetilde{B}$, são iguais a 3. De facto, tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \mapsto \ell_2 + 2\ell_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \mapsto 2(\ell_3 - \frac{1}{2}\ell_2)]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e, portanto, $r(B) = 3$. Por outro lado,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \mapsto \ell_2 - \ell_1 \\ \ell_3 \mapsto \ell_3 - \ell_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \mapsto \ell_3 - 3\ell_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

concluindo-se que também se tem $r(\widetilde{B}) = 3$. Consequentemente, quer $\mathcal{B}$, quer $\widetilde{\mathcal{B}}$, são bases de $\mathbb{R}^3$. Sejam $\mathcal{B} = \big(b_1, b_2, b_3\big)$ e $\widetilde{\mathcal{B}} = \big(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3\big)$. Escreva-se $b_1 = \alpha_{11}\tilde{b}_1 + \alpha_{21}\tilde{b}_2 + \alpha_{31}\tilde{b}_3$ na forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \alpha_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_{31} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e proceda-se analogamente para b_2 e b_3. Reunindo os três sistemas de equações assim obtidos numa única equação matricial tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}}_{\mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})} \tag{1}$$

Portanto, de (1) conclui-se que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2/3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voltando a (1), se multiplicarmos ambos os membros, à direita, por $\mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})^{-1}$, e passarmos o membro do lado esquerdo para o lado direito e vice-versa, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})^{-1},$$

o que significa que

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}, \widetilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B},) = \mathcal{M}(\mathrm{id}, \mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

IV. a) A linearidade da aplicação T é consequência imediata das propriedades da derivada, nomeadamente da derivada da soma ser a soma das derivadas, $(f+g)' = f' + g'$, e da derivada do produto de uma função por um escalar ser a derivada da função vezes o escalar, $(\alpha f)' = \alpha f'$. Portanto, se $p, q \in \mathbb{R}_2[x]$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tem-se

$$\begin{aligned} T(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q)' + (\alpha p + \beta q) \\ &= \alpha p' + \beta q' + \alpha p + \beta q \\ &= (\alpha p' + \alpha p) + (\beta q' + \beta q) \\ &= \alpha(p' + p) + \beta(q' + q) \\ &= \alpha T(p) + \beta T(q), \end{aligned}$$

o que prova a linearidade de T.

b) Consideremos a base $\mathcal{D} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Então, como

$$\begin{array}{rclcccccc} T(1) & = & 1 & = & 1\cdot 1 & + & 0\cdot x & + & 0\cdot x^2 \\ T(x) & = & 1+x & = & 1\cdot 1 & + & 1\cdot x & + & 0\cdot x^2 \\ T(x^2) & = & 2x + x^2 & = & 0\cdot 1 & + & 2\cdot x & + & 1\cdot x^2 \end{array}$$

concluindo-se, assim, que a matriz que representa T na base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ é

$$\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Temos vários processos alternativos de chegar à resposta a esta questão. Talvez o menos trabalhoso seja a utilização do Teorema da Dimensão: comece-se por observar que a dimensão de $\mathbb{R}_2[x]$ é 3; agora, sendo $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})$ a matriz triangular escrita anteriormente, sabe-se que o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal e é, neste caso, diferente de zero, ou seja, $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})$ é invertível, pelo que $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})u = 0$ se e só se $u = 0$. Portanto $\operatorname{Nuc}\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D}) = \{0\}$ e $\dim \operatorname{Nuc}\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D}) = 0$. Pelo Teorema da Dimensão conclui-se, então, que a dimensão da imagem de T é 3.

d) Já concluímos na alínea anterior que $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})$ é invertível. Portanto, a aplicação linear T é invertível e a representação matricial de T^{-1} na base $\mathcal{D}$ escolhida é a matriz $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})^{-1}$ dada por

$$\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta é a matriz que representa a transformação inversa T^{-1} na base $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Como, nesta base, o polinómio $p_0(x) = 1$ é representado pelo vetor $(1,0,0)^\mathsf{T}$, o polinómio $p_1(x) = x$ é representado por $(0,1,0)^\mathsf{T}$, e $p_2(x) = x^2$ por $(0,0,1)^\mathsf{T}$, podemos aplicar $\mathcal{M}(T;\mathcal{D},\mathcal{D})^{-1}$ a estes vetores para descobrirmos como é que T^{-1} atua sobre os vetores da base de $\mathbb{R}_2[x]$ que escolhemos: temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja $T^{-1}(1) = 1$;

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja $T^{-1}(x) = -1 + x$; e, por fim,

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja[2] $T^{-1}(x^2) = 2 - 2x + x^2$. Portanto, usando a linearidade de T^{-1}, conclui-se que a expressão para a ação de $T^{-1} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ num polinómio arbitrário $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ é a seguinte[3]

$$\begin{aligned} T^{-1}(f) &= T^{-1}(a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= a_2T^{-1}(x^2) + a_1T^{-1}(x) + a_0T^{-1}(1) \\ &= a_2(2 - 2x + x^2) + a_1(-1 + x) + a_0 1 \\ &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) - (2a_2x + a_1) + 2a_2 \\ &= f - f' + f'' \end{aligned}$$

V. Comecemos por observar que, sendo R uma aplicação linear, a imagem, por R, de um segmento de reta é ainda um segmento de reta: um segmento de reta com pontos extremos p e q é descrito pela expressão $\lambda q + (1 - \lambda)p$, onde o parâmetro real λ varia entre 0 e 1; mas sendo R linear tem-se $R(\lambda q + (1 - \lambda)p) = \lambda R(q) + (1 - \lambda)R(p)$, ou seja, a imagem do segmento de reta entre p e q é o segmento de reta entre $R(p)$ e $R(q)$. Portanto, para esboçar a imagem $R(Q)$ do quadrado Q, basta representar geometricamente as imagens dos vertices de Q e uni-las por segmentos de reta. Os vértices de Q são $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ e $(1, 1)$. Pela expressão de R conclui-se imediatamente que $R(0, 0) = (0, 0), R(0, 1) = (-1, 1), R(1, 0) = (1, 1)$ e $R(1, 1) = (0, 2)$. Isto e o que se concluiu acima permite desenhar o esboço de Q e de $R(Q)$ apresentado na Figura 1. Notemos, agora, que o que R está a fazer ao quadrado Q é rodá-lo de $\frac{\pi}{4}$ radianos (45°) no sentido direto e aumentar comprimentos de um fator de[4] $\sqrt{2}$.

Suponhamos que R tem uma valor próprio $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, sabemos que existirá um vetor $v \neq 0$ tal que $R(v) = \lambda v$. Mas, se λ é um número real, um vetor λv é colinear com o vetor v (e com um comprimento maior, menor, ou igual ao de v, consoante $|\lambda| > 1, |\lambda| < 1$, ou $|\lambda| = 1$, respetivamente). Mas então, se o que observámos acima, baseados na Figura 1, for, de facto, verdade em geral, não é possível que existam valores próprios reais de R, pois $R(v)$ não é colinear com v, mas sofre uma rotação no sentido direto, qualquer que seja o vetor v.

[2]Se achar estas expressões algo estranhas como expressões para a inversa de T poderá tentar convencer-se de que estão corretas calculando, por exemplo, $T(T^{-1}(x^2))$ e $T^{-1}(T(x^2))$ e verificando que ambas são iguais a x^2 (ou seja, que $TT^{-1} = \text{id} = T^{-1}T$).

[3] A confirmação, a partir desta expressão, de que $T^{-1}(T(f)) = T(T^{-1}(f)) = \text{id}(f) = f$ é muito simples, mas há que relembrar que, quando f é um polinómio de grau dois, tem-se $f''' \equiv 0$.

[4]Note que o lado do quadrado Q entre $(0, 0)$ e $(1, 0)$, que tem comprimento igual a 1, é transformado no lado do quadrado $R(Q)$ entre $(0, 0)$ e $(1, 1)$, que tem comprimento igual a $\sqrt{2}$ $(= \sqrt{2} \cdot 1)$ e, analogamente, a diagonal do quadrado original Q entre $(0, 0)$ e $(1, 1)$, com comprimento $\sqrt{2}$, é transformada na diagonal do quadrado imagem $R(Q)$ entre $(0, 0)$ e $(0, 2)$, que tem comprimento 2 $(= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2})$, etc.

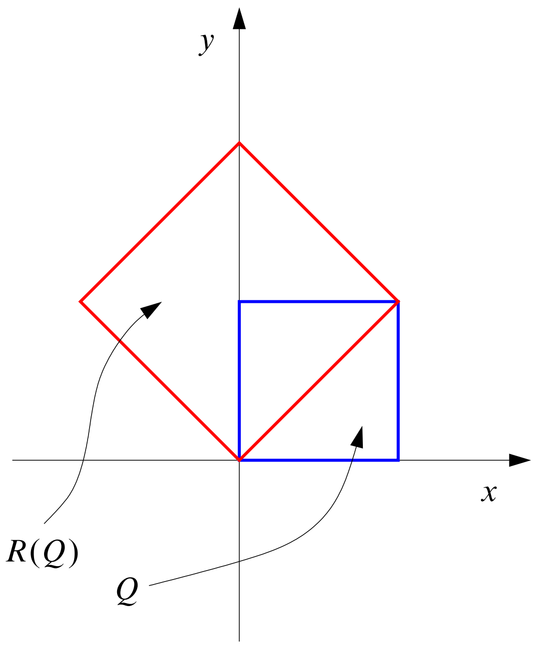

Figura 1: Esboço de Q e de $R(Q)$.

VI. Os valores próprios de A são os zeros do polinómio característico:

$$p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - 1\big) = -\lambda(\lambda-2)^2.$$

Portanto, A tem um valor próprio $\lambda = 0$, com multiplicidade algébrica igual a 1, e um valor próprio $\lambda = 2$, com multiplicidade algébrica igual a 2.

O conjunto dos vetores próprios associados a um valor próprio λ é núcleo de $A - \lambda I$, ou seja, é o conjunto dos vetores u que satisfazem $(A - \lambda I)u = 0$. Sendo o núcleo de uma matriz, o conjuntos dos vetores próprios associados a um dado valor próprio é um espaço vetorial.

Para $\lambda = 0$ tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 \\ 2u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $u_3 = 0$ e $u_2 = -u_1$. Portanto os vetores próprios correspondentes ao valor próprio $\lambda = 0$ são todos os vetores do tipo

$$u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, constitui um espaço vetorial de dimensão igual a 1.

Para $\lambda = 2$ tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v_1 + u_2 \\ v_1 - v_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $v_2 = v_1$, sem restrições sobre a componente v_3. Portanto os vetores próprios correspondentes ao valor próprio $\lambda = 0$ são todos os vetores do tipo

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ v_3 \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

e portanto constitui um espaço vetorial de dimensão igual a 2.

Como a soma das dimensões dos espaços próprios de A é igual à dimensão da matriz, 3, podemos concluir que A é diagonalizável e que uma matriz de mudança de base que permite transformar A na matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(0, 2, 2)$ tem por colunas os vetores próprios de A escritos na mesma ordem. Recorrendo às expressões acima para os vetores próprios (fazendo $u_1 = -1$ no primeiro caso e, no segundo caso, primeiro $v_1 = 1$ e $v_3 = 0$, e depois $v_1 = 0$ e $v_3 = 1$, obtém-se a matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos facilmente concluir que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e, portanto, como $D^5 = \operatorname{diag}(0, 2^5, 2^5) = \operatorname{diag}(0, 32, 32)$, podemos concluir que

$$A^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 \\ 16 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}.$$