EFÓLIO GLOBAL

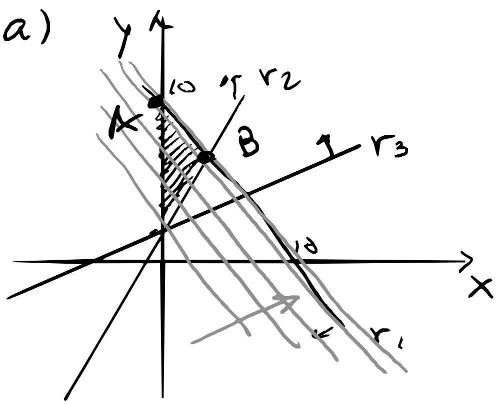
1 - $\max F = x + y$

sa
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ -2x + y \geq 1 \\ -x + y \geq 1 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

$\max F = x + y - \alpha_1 M - \alpha_2 M$

$$\begin{cases} x + y + F_1 = 10 \\ -2x + y - F_2 + \alpha_1 = 1 \\ -x + y - F_3 + \alpha_2 = 1 \\ x, y, F_1, F_2, F_3, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0 \end{cases}$$

a)



Como o declive de r_1 $(x+y=10)$ é o mesmo das curvas de nível de F $(x+y=c)$

então todos os pontos no segmento de recta entre A e B são soluções óptimas.

A(0,10)

B:

$$\begin{cases} x+y=10 \\ -2x+y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=10-x \\ -2x+10-x=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{—} \\ -3x=-9 \end{cases} \quad \begin{cases} y=7 \\ x=3 \end{cases} \qquad B(3,7)$$

$$(x^*,y^*)=\lambda(0,10)+(1-\lambda)(3,7)$$

$$\lambda\in[0,1]$$

b) Como visto graficamente, a restrição 3 é redundante, logo o problema é equivalente a

$$\max F = X + Y \qquad \max F = X + Y - \alpha M$$

$$\text{sa} \begin{cases} X + Y \leq 10 \\ -2X + Y \geq 1 \\ X, Y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{sa} \begin{cases} X + Y + F_1 = 10 \\ -2X + Y - F_2 + \alpha = 1 \\ X, Y, F_1, F_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

	X	Y	F_1	F_2	α	TI	Δ	
F_1	1	1	1	0	0	10		
	-2	1	0	-1	1	1		
F	-1	-1	0	0	M	0		$l_3 - M l_2$
F_1	1	1	1	0	0	10	10	$l_1 - l_2$
α	-2	1	0	-1	1	1	1 ←	
F	-1+2M	-1-M	0	M	0	-M		$l_3 + (1+M) l_2$
F_1	3	0	1	1	-1	9	3 ←	$\frac{1}{3} l_1$
Y	-2	1	0	-1	1	1		$l_2 + \frac{2}{3} l_1$
F	-3	0	0	-1	1+M	1		$l_3 + l_1$
X	1	0	1/3	1/3	-1/3	3	9 ←	$3 l_1$
Y	0	1	2/3	-1/3	1/3	7		$l_2 + l_1$
F	0	0	1	0	M	10		
F_2	3	0	1	1	-1	9		
Y	1	1	1	0	0	10		
F	0	0	1	0	M	10		

$(x^*, y^*) = (3, 7)$

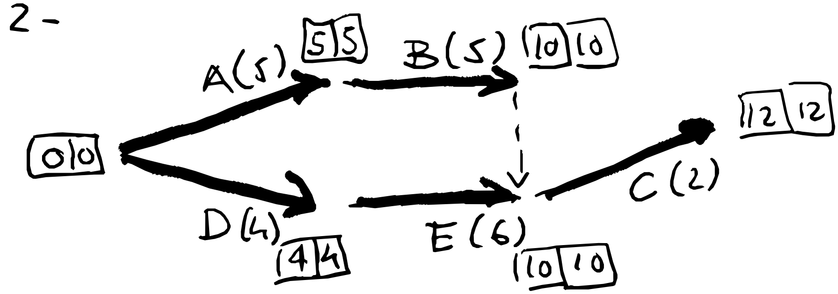
solução não única

$(x^*, y^*) = (0, 10)$

Solução: $(x^*, y^*) = \lambda(0,10) + (1-\lambda)(3,7)$, $\lambda \in [0,1]$

$F^* = 10$

2-



a) Duração média = 12 ut

CCM: A, B, D, E, C

b)

$D_A + D_B + D_C \sim$

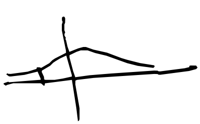
$\sim \mathcal{N}(5, 0.3) + \mathcal{N}(5, 0.5) + 2$

$= \mathcal{N}(\mu = 5+5, \sigma^2 = 0{,}3^2 + 0{,}5^2) + 2$

$= \mathcal{N}(\underbrace{\mu = 10, \sigma^2 = \tfrac{34}{100}}_{W}) + 2$

$P[W + 2 > 10] =$

$= P[W > 8] = P\left[\underbrace{\frac{W - 10}{\sqrt{34/100}}}_{Z \sim \mathcal{N}(0,1)} > \frac{8 - 10}{\sqrt{34/100}}\right] =$



$= P\left[Z > \frac{-20}{\sqrt{34}}\right] = P[Z > -3{,}43] =$

$= 1 - P[Z < -3{,}43] \doteq 1 - 0{,}0013 \approx 99{,}87\%$

$$D_D + D_E + D_C \sim$$

$$\sim \mathcal{N}(\mu=4, \sigma=0.3) + \mathcal{N}(\mu=6, \sigma=0.7) + 2 =$$

$$= \mathcal{N}(\mu=10, \sigma^2=0.3^2+0.7^2) + 2 =$$

$$= \underbrace{\mathcal{N}\left(\mu=10, \sigma^2=\frac{58}{100}\right)}_{W} + 2$$

$$P(W+2>10) = P(W>8) =$$

$$P\left[\underbrace{\frac{W-10}{\sqrt{58}/10}}_{Z\sim\mathcal{N}(0,1)} > \frac{8-10}{\sqrt{58}/10}\right] =$$

$$= P[Z > -2{,}626] = 1 - P[Z<-2{,}626] \simeq$$

$$\simeq 1 - 0{,}0043 \simeq 99{,}6\%$$

$$D_{TOT} = \max(D_A+D_B+D_C,\ D_D+D_E+D_C)$$

Logo

$$P \geq 99{,}6\%$$

3 -

a) $$f_X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \le 0 \\ \omega^2, & \omega \in [0,1] \\ 0, & \omega \in [1,2] \\ 1, & \omega \in [2, 8/3] \\ 0, & \omega \geq 8/3 \end{cases}$$

$$F_X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \le 0 \\ \omega^3/3, & \omega \in [0,1] \\ 1/3, & \omega \in [1,2] \\ \omega - 5/3, & \omega \in [2, 8/3] \\ 1, & \omega \geq 8/3 \end{cases}$$

1,0

$\underline{\omega \in [0,1]}$

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{\omega} t^2\,dt =$$

$$= 0 + \omega^3/3$$

$\underline{\omega \in [1,2]}$

$$F_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} t^2\,dt + \int_{1}^{\omega} 0\,dt =$$

$$= 0 + 1/3 + 0 = 1/3$$

$\underline{u \in [2, 8/3]}$:

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 0\,dt +$$

$$+ \int_2^u 1\,dt =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + 0 + u - 2 = u - \frac{5}{3}$$

$\underline{u \geq 8/3}$:

$$F_X(u) = \int_{-\infty}^{u} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 t^2\,dt +$$

$$+ \int_1^2 0\,dt + \int_2^{8/3} 1\,dt + \int_{8/3}^{u} 0\,dt =$$

$$= 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{8}{3} - 2 + 0 =$$

$$= 3 - 2 = 1$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ y^2, & 0\le y<1 \\ 1, & 1\le y<5/3 \\ 0, & y\geq 5/3 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ y^3/3, & 0\le y<1 \\ y-2/3, & 1\le y<5/3 \\ 1, & y\geq 5/3 \end{cases}$$

1.0

$\underline{\underline{0\le y<1}}$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^y t^2 dt =$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^y = y^3/3$$

$\underline{\underline{1\le y<5/3}}$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_1^y 1\,dt$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + [t]_1^y = \frac{1}{3} + y - 1 = y - \frac{2}{3}$$

s/a presenter calculos 1.4

$\underline{y \geq 5/3}$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{1} t^2 dt +$$

$$+ \int_{1}^{5/3} 1\,dt + \int_{5/3}^{y} 0\,dt =$$

$$= 0 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[t\right]_1^{5/3} + 0 =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{5}{3} - 1 = 2 - 1 = 1$$

b) Como vimos em a), F_X não é invertível (apesar de contínua), pelo que não pode ser usado o Método da Inversa para gerar números pseudo-aleatórios com distribuição X.

Em vez disso, pode ser usado o Método da Rejeição.

c) $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{y^3}{3}, & 0 \leq y < 1 \\ y - 2/3, & 1 \leq y < 5/3 \\ 1, & y \geq 5/3 \end{cases}$

Gerar número pseudo-aleatório $U \in [0,1]$.

- Se $U \leq F_Y(1) = \frac{1}{3}$ (i.e p/ $y \in [0,1[$),

  invertemos $U = \frac{y^3}{3}$:

  $U = \frac{y^3}{3} \Leftrightarrow y^3 = 3U \Leftrightarrow \boxed{y = \sqrt[3]{3U}}$

- Se $F_Y(1) \leq U \leq F_Y(5/3) \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq U \leq 1$ (i.e p/ $y \in [1, 5/3[$),

  invertemos $U = y - 2/3$:

  $U = y - 2/3 \Leftrightarrow \boxed{y = U + 2/3}$

Assim, gerada a variável pseudo-aleatória $U \in [0,1]$ obtemos a variável pseudo-aleatória X

$$NPAX = \begin{cases} \sqrt[3]{3U}, & U \leq \frac{1}{3} \\ U + \frac{2}{3}, & U > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Fluxograma: