

U.C. 21076

Investigação Operacional

14 de setembro de 2018

-- INSTRUÇÕES --

Leia com atenção antes de iniciar a sua prova

- O tempo de duração da prova de exame é de **2 horas + 30 minutos de tolerância**.
- Deverá responder a todas as questões na folha de ponto, preencher todos os cabeçalhos e todos os espaços reservados à sua identificação, com letra legível.
- Verifique no momento da entrega da(s) folha(s) de ponto se todas as páginas estão rubricadas pelo vigilante. Caso necessite de mais do que uma folha de ponto, deverá numerá-las no canto superior direito.
- Em hipótese alguma serão aceites folhas de ponto dobradas ou danificadas.
- Exclui-se, para efeitos de classificação, toda e qualquer resposta apresentada em folhas de rascunho.
- Utilize unicamente tinta de cor azul ou preta.
- Os telemóveis deverão ser desligados durante toda a prova e os objectos pessoais deixados em local próprio da sala de exame.
- A prova é constituída por **4 páginas** (incluindo formulário e tabela da distribuição normal padrão) e termina com a palavra **FIM**. O exame contém **5 grupos** de questões.
- Verifique o seu exemplar e, caso encontre alguma anomalia, dirija-se ao professor vigilante nos primeiros 15 minutos da mesma, pois qualquer reclamação sobre defeito(s) de formatação e/ou de impressão que dificultem a leitura não será aceite depois deste período.
- É permitida a utilização de máquina de calcular.
- Nas questões que envolvam cálculos ou demonstrações o estudante deve explicitar e justificar todos os passos necessários.
- Os grupos de questões terão as seguintes cotações:

1.	2.	3.	4.	5.
2.0 val.	4.5 val.	4.5 val.	4.5 val.	4.5 val.

1. Um departamento de uma empresa produz dois tipos de produtos: P1 e P2. Cada unidade do produto tipo P1 tem que passar por quatro fases distintas, até ser dado como concluído. Essas fases são: F1, F2, F3 e F4. Uma unidade de produto P1 requer 48 minutos na fase F1, 40 minutos na fase F2, 2 horas na fase F3 e 5 horas e 20 minutos na fase F4. Cada unidade do produto tipo P2 requer 72 minutos na fase F1, 2 horas na fase F2, 3 horas na fase F3 e 4 horas na fase F4. A mão de obra diária disponível em cada uma das fases F1, F2, F3 e F4 é respectivamente 16, 30, 16 e 64 horas. O lucro obtido com a venda de uma unidade de produto tipo P1 é 200€ e com a venda de uma unidade do tipo P2, 250€. Com o objectivo de encontrar o plano óptimo diário de produção, formule o problema, em Programação Linear.

2. Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\text{Maximizar } F = X + Y$$

sujeito a:

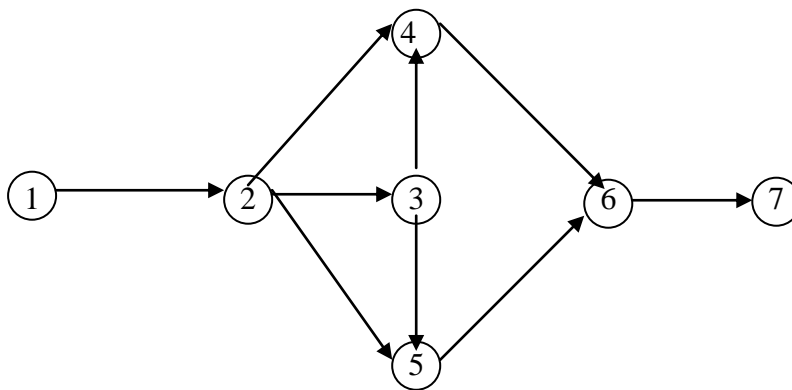
$$\begin{aligned} X + Y &\leq 7 \\ X + 2Y &\leq 10 \\ X, Y &\geq 0 \end{aligned}$$

- a) Resolva-o graficamente.
- b) Transforme as restrições em igualdades através da introdução de variáveis de folga e escreva o problema na “forma standard”.
- c) Como classifica o espaço de soluções admissíveis deste problema?
- d) Resolva o problema pelo Algoritmo do Simplex.

3. A Padaria Pá D'Ouro está excepcionalmente aberta aos domingos para vender bolinhas de pão caseiro e é o próprio dono a atender ao balcão. Os clientes aos domingos chegam à Padaria de acordo com uma distribuição de Poisson e com taxa média de chegada de 20 clientes por hora, ávidos de provar o pão quentinho e esperando o tempo que for preciso para ser atendidos. Em média o dono da Padaria gasta 3 minutos a atender cada cliente, sendo o tempo de atendimento exponencialmente distribuído.

- Qual a probabilidade de se formar uma fila de espera ?
- Qual o comprimento médio da fila de espera ?
- Qual o tempo médio de espera por cliente?
- Determine a probabilidade de um cliente esperar no máximo 15 minutos na fila.

4. Considere a seguinte rede à qual está associada a tabela abaixo:



Actividades	Duração Normal	Duração Optimista	Duração Pessimista
(1,2)	4	2	6
(2,4)	7	4	10
(2,3)	8	6	14
(2,5)	6	3	9
(4,6)	15	12	22
(3,4)	2	1	3
(3,5)	9	2	12
(5,6)	9	6	12
(6,7)	8	5	15

- Determine o caminho crítico associado à duração normal das actividades.
- Qual a probabilidade de a duração média total do projeto requerer de 35 a 45 unidades de tempo?

- c) O director do projeto estabeleceu que se o projecto demorar entre 37 e 40 dias não há penalização nem bónus a atribuir. Se o projeto demorar mais de 40 dias a ser concluído foi estabelecida uma penalização de 1000 Euros e se o projecto for concluído em menos de 37 dias há um bónus. Qual o valor a atribuir a esse bónus por forma que em média na realização do projeto não haja penalizações nem bónus?

5. Considere o seguinte jogo que consiste no lançamento de dois dados equilibrados por parte de três jogadores, sequencialmente, e onde cada jogada consiste no seguinte:

- 1º) Um jogador lança os dados.
- 2º) Se a soma for igual a 2, o jogador recebe um prémio, P1.
- 3º) Se a soma estiver entre 3 e 6 ou entre 8 e 11, o jogador paga 1 Euro que se irá juntar ao montante que no momento constitui P1.
- 4º) Se a soma for igual a 7, o jogador paga 1 Euro mas que se irá juntar ao valor corrente de um outro montante, um prémio P2.
- 5º) Se a soma for igual a 12, o jogador recebe os dois prémios, P1 e P2.

Quando o jogo começa, P1 e P2 são nulos (o que significa que inicialmente não é vantajoso ganhar!)

Os jogadores partem com um montante inicial de 20 Euros cada um.

O jogo termina quando os três jogadores completarem, cada um, 30 jogadas.

Nota: Admita que à invocação da rotina RANDOM é afectado um NPA Unif[0,1] à variável U.

- a) Elabore a rotina **JOGADA**, que gera do modo mais eficiente possível uma jogada deste jogo.
- b) Elabore a rotina **GANHA**, que determina o vencedor de um jogo e o respetivo saldo.
- c) Elabore um modelo de simulação que permita estudar a distribuição do saldo associado à realização deste jogo.

Formulário de Filas de Espera

Sistema M/M/1, População = ∞ ; Fila máxima = ∞

Processo de **chegadas** Poissoniano com uma taxa de chegadas de λ clientes por unidade de tempo.

Duração do **serviço** com distribuição Exponencial Negativa – taxa de atendimento de μ clientes por unidade de tempo (pelo **único servidor**).

Disciplina da fila: FIFO (atendimento por ordem de chegada)

Taxa de **ocupação** $\rho = \lambda / \mu$ ($\rho < 1$)

Taxa de **desocupação** $= 1 - \rho = P_0 = P(W_q = 0)$

$$L = L_q + \lambda / \mu$$

$$L = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$W = W_q + 1 / \mu$$

$$W = L / \lambda = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$W_q = L_q / \lambda = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P_0 = 1 - \rho = P(W_q = 0)$$

$$P_n = \rho^n P_0 = \rho^n (1 - \rho)$$

$$P(n > k) = \rho^{k+1}$$

$$P(W > t) = e^{-\mu(1-\rho)t} = e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

$$P(W_q > t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t} = \rho e^{-t/W} \quad \text{para } t \geq 0$$

