Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre de 13 a 21 de Maio de 2023 **Enunciado**

1. Um laboratório de investigação pretende executar um projeto, para o qual tem 30 horas disponíveis para o executar. Os próprios investigadores identificaram as tarefas a executar, assim como o tempo necessário para a sua execução e as precedências, as informações recolhidas são apresentadas na seguinte tabela:

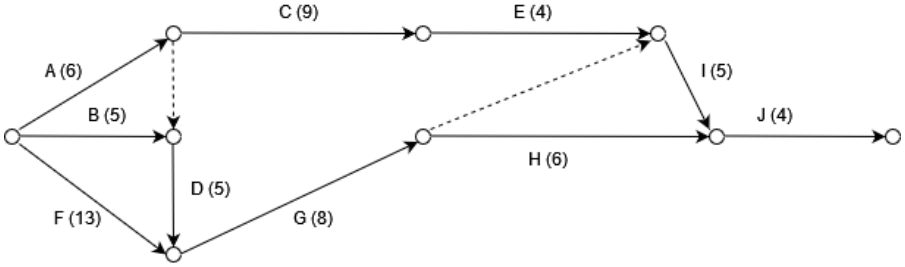
Atividades	Precedências	Duração (horas)
A	—	6
B	—	5
C	A	9
D	A, B	5
E	C	4
F	—	13
G	D, F	8
H	G	6
I	E, G	5
J	H, I	4

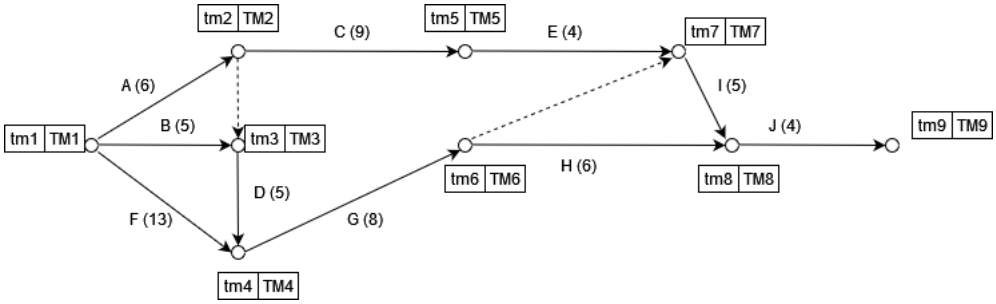
Com base nos dados apresentados, responda às seguintes alíneas.

a) (1.0 val.) O grupo de investigação consegue cumprir o prazo? Justifique.

Resolução:

Começamos por construir a rede do projecto.

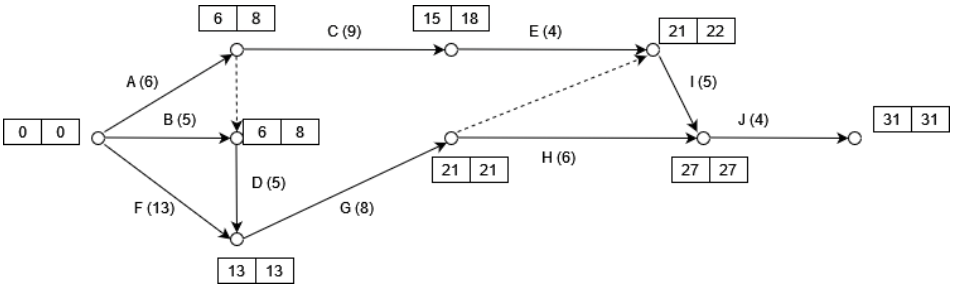




Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 6 = 6$
$tm_3 = \max\{tm_1 + 5, tm_2 + 0\} = \max\{5, 6\} = 6$
$tm_4 = \max\{tm_1 + 13, tm_3 + 5\} = \max\{13, 11\} = 13$
$tm_5 = tm_2 + 9 = 15$
$tm_6 = tm_4 + 8 = 21$
$tm_7 = \max\{tm_5 + 4, tm_6 + 0\} = \max\{19, 21\} = 21$
$tm_8 = \max\{tm_6 + 6, tm_7 + 5\} = \max\{27, 26\} = 27$
$tm_9 = tm_8 + 4 = 31$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_9 = tm_9 = 31$ (nó final)
$TM_8 = TM_9 - 4 = 27$
$TM_7 = TM_8 - 5 = 22$
$TM_6 = \min\{TM_8 - 6, TM_7 - 0\} = \min\{21, 22\} = 21$
$TM_5 = TM_7 - 4 = 18$
$TM_4 = TM_6 - 8 = 13$
$TM_3 = TM_4 - 5 = 8$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 9, TM_3 - 0\} = \min\{9, 8\} = 8$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 6, TM_3 - 5, TM_4 - 13\} = \min\{2, 3, 0\} = 0$

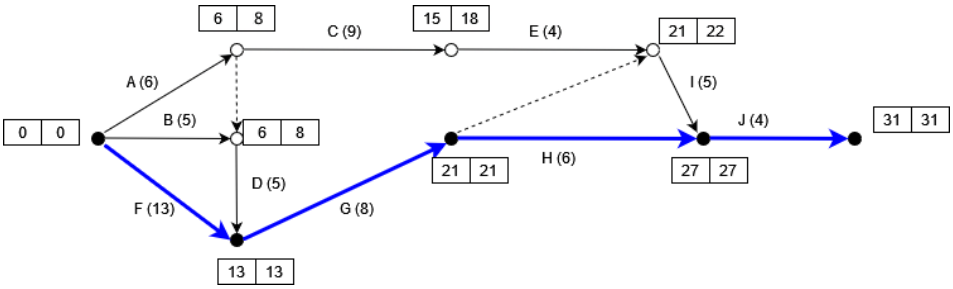


Conclui-se assim que a duração total média do projecto é 31 horas, portanto não conseguirão cumprir o prazo.

b) (0.5 val.) Identifique o conjunto de atividades criíticas. Justifique.

Resolução:

Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



Marcou-se a preto os nós críticos, em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 5 nós críticos: 1, 4, 6, 8 e 9. As actividades que unem estes nós são candidatas a actividades críticas. Para serem actividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da actividade (para não ahver folgas).

Actividade	tm(i+1)-tm(i)	Duração	Conclusão
F	$tm_4 - tm_1 = 13$	13	actividade crítica
G	$tm_6 - tm_4 = 21 - 13 = 8$	8	actividade crítica
H	$tm_8 - tm_6 = 27 - 21 = 6$	6	actividade crítica
J	$tm_9 - tm_8 = 31 - 27 = 4$	4	actividade crítica

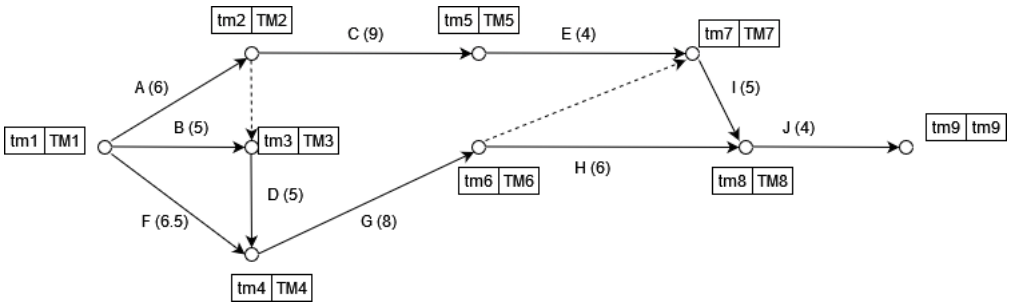
Conclui-se que as actividades F, G, H e J são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas actividades F, G, H e J.

c) (0.9 val.) Considere que no decorrer do projecto sucedem os seguintes acontecimentos. Quais as implicações para o projecto (cada alínea é considerada de forma independente)?

i. A tarefa D inicia 2 horas mais tarde.
Resolução:
A tarefa D só pode começar ao fim de 6 horas. Se começar 2 horas mais tarde, então começa 8 horas depois do início do projecto. e termina ao fim de 13 horas, que é a altura em que pode começar a actividade G (uma vez que esta depende de F, que só termina ao fim de 13 horas). Portanto, não cria qualquer atraso no projecto.

ii. A tarefa I demora mais 25% de tempo a ser realizada.
Resolução:
Se a actividade I demora mais 25% a ser realizada, então a duração será de 6 horas e 15 minutos. Como a actividade só tinha 1 hora de folga, então vai atrasar a duração do projecto em 15 minutos.

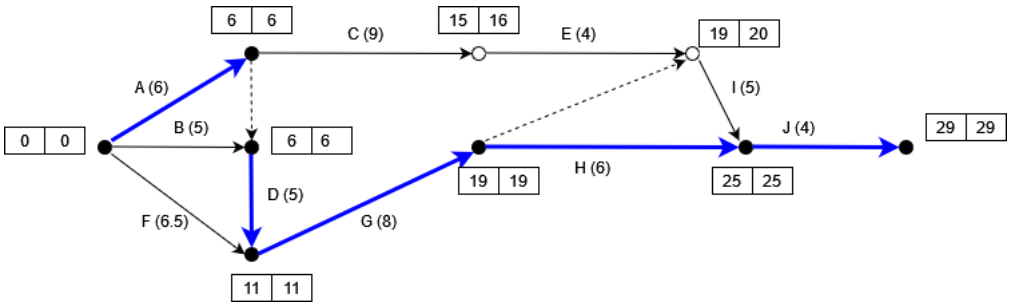
iii. A tarefa F demorou 50% do tempo previsto.
Resolução:
A tarefa F demorou apenas 50% do tempo previsto, ou seja ficou concluída ao final de 6 horas e meia. Isso já vai causar alterações a duração total do projecto, como se ilustra a seguir.



Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 6 = 6$
$tm_3 = \max\{tm_1 + 5, tm_2 + 0\} = \max\{5, 6\} = 6$
$tm_4 = \max\{tm_1 + 6.5, tm_3 + 5\} = \max\{6.5, 11\} = 11$
$tm_5 = tm_2 + 9 = 15$
$tm_6 = tm_4 + 8 = 19$
$tm_7 = \max\{tm_5 + 4, tm_6 + 0\} = \max\{19, 19\} = 19$
$tm_8 = \max\{tm_6 + 6, tm_7 + 5\} = \max\{25, 24\} = 25$
$tm_9 = tm_8 + 4 = 29$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_9 = tm_9 = 29$ (nó final)
$TM_8 = TM_9 - 4 = 25$
$TM_7 = TM_8 - 5 = 20$
$TM_6 = \min\{TM_8 - 6, TM_7 - 0\} = \min\{19, 20\} = 19$
$TM_5 = TM_7 - 4 = 16$
$TM_4 = TM_6 - 8 = 11$
$TM_3 = TM_4 - 5 = 6$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 9, TM_3 - 0\} = \min\{7, 6\} = 6$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 6, TM_3 - 5, TM_4 - 6.5\} = \min\{0, 1, 4.5\} = 0$



Conclui-se assim que as actividades críticas passam a ser as actividades A, D, G, H e J e que a duração total média do projecto é 29 horas. Nestas condições, conseguirão cumprir o prazo.

2. Num balcão da seguradora Simplex o atendimento é efetuado por 2 funcionários. O número de clientes esperados é, em media, 12 clientes por hora e segue uma distribuição de Poisson.

Os clientes são atendidos por ordem de chegada e cada cliente demora cerca de 12 minutos a ser atendido, seguindo uma distribuição exponencial.

a) (0.3 val.) Um dos funcionários diz que é impossível o atendimento ser efetuados sem 3 funcionários no mínimo. Comente a afirmação.

Resolução:

Começamos por caracterizar o sistema:

- dois servidores (os funcionários) $S = 2$
- processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegada de $\lambda = 12$ clientes/hora
- o atendimento segue uma disciplina FIFO (i.e. por ordem de chegada), seguindo uma distribuição exponencial com uma taxa de atendimento de $\mu = \frac{60}{12}h^{-1} = 5h^{-1}$ por funcionário.

Assim, temos um sistema $M/M/S$ com $S = 2$.

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{12}{2 \times 5}\frac{6}{5} > 1$$

Como $\rho > 1$, então o ritmo das chegadas ultrapassa a capacidade de atendimento e, portanto, o funcionário tem razão ao afirmar que que é impossível o atendimento apenas com 2 funcionários.

b) (0.8 val.) Qual o número de funcionários que deve existir, garantindo que a probabilidade de ter de esperar não é superior a 20%.

Resolução:

Queremos garantir que a probabilidade de ter de esperar não é superior a 20%, ou seja, que $P\left(W_q > 0\right) \leq 0.2$:

$$P\left(W_q > 0\right) = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^{-S\mu 0(1-\rho)} = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} e^0 = \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)}$$

Vamos tentar vários valores para S até ter a probabilidade acima inferior a 20%.

$S = 2$ Já vimos na alínea anterior que não é possível

$S = 3$

$$\rho = \frac{\lambda}{S\mu} = \frac{12}{3 \times 5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} < 1 \quad \surd$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left[\frac{S^S\rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S}\frac{(S\rho)^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{3^3\left(\frac{4}{5}\right)^4}{3!\left(1-\frac{4}{5}\right)} + \sum_{n=0}^{3}\frac{(3\times\frac{4}{5})^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{3^3\frac{4^4}{5^4}}{3!\frac{1}{5}} + \frac{(3\times\frac{4}{5})^0}{0!} + \frac{(3\times\frac{4}{5})^1}{1!} + \frac{(3\times\frac{4}{5})^2}{2!} + \frac{(3\times\frac{4}{5})^3}{3!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{3^3 4^4 5}{3!5^4} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{3^2 4^2}{2\ 5^2} + \frac{3^3 4^3}{3!5^3}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{3^2 4^3\ 2}{5^3} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{3^2 8}{5^2} + \frac{3^2 4^2\ 2}{5^3}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{2.3^2.4^3 + 5^3 + 12.5^2 + 3^2.5.8 + 3^2.4^2.2}{5^3}\right]^{-1} = \\
&= \left(\frac{89}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{89}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(W_q > 0\right) &= \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} = \\
&= \frac{(3\frac{4}{5})^3\frac{5}{89}}{3!\left(1-\frac{4}{5}\right)} = \\
&= \frac{3^3\frac{4^3}{5^3}\frac{5}{89}}{3!\frac{1}{5}} = \frac{3^3 4^3 5^2}{3!5^3 89} = \frac{2.3^2.4^2}{5\times 89} = \frac{288}{445} \sim 0.65 > 0.2
\end{aligned}
$$

Com 3 funcionários ainda não se consegue ter a probabilidade de tempo de espera inferior a 20%.

$S = 4$

$$
\rho = \frac{\lambda}{4\mu} = \frac{12}{4\times 5} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} < 1 \quad \surd
$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left[\frac{S^S\rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S}\frac{(S\rho)^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{4^4\left(\frac{3}{5}\right)^5}{4!\left(1-\frac{3}{5}\right)} + \sum_{n=0}^{4}\frac{(4\times\frac{3}{5})^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{4^4\frac{3^5}{5^5}}{4!\frac{2}{5}} + \frac{(4\times\frac{3}{5})^0}{0!} + \frac{(4\times\frac{3}{5})^1}{1!} + \frac{(4\times\frac{3}{5})^2}{2!} + \frac{(4\times\frac{3}{5})^3}{3!} + \frac{(4\times\frac{3}{5})^4}{4!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{4^4 3^5.5}{4!2.5^5} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{4^2 3^2}{2!5^2} + \frac{4^3 3^3}{3!5^3} + \frac{4^4 3^4}{4!5^4}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{4^2 3^4}{5^4} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{2.4.3^2}{5^2} + \frac{2.4^2 3^2}{5^3} + \frac{2.3^3.4^2}{5^4}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{4^2 3^4 + 5^4 + 12.5^3 + 2.4.3^2.5^2 + 2.3^2.4^2.5 + 2.3^3.4^2}{5^4}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{301}{25}\right]^{-1} = \frac{25}{301}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(W_q > 0\right) &= \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} = \\
&= \frac{\left(4\frac{3}{5}\right)^4 \frac{25}{301}}{4!\left(1-\frac{3}{5}\right)} = \\
&= \frac{4^4\frac{3^4}{5^4}\frac{25}{301}}{4!\frac{2}{5}} = \frac{4^4 3^4.5.25}{2.4!5^4.301} = \\
&= \frac{4^2.3^3.25}{5^3.301} = \frac{432}{1505} \sim 0.29 > 0.2
\end{aligned}
$$

Com 4 funcionários ainda não se consegue ter a probabilidade de tempo de espera inferior a 20%.

$S = 5$

$$
\rho = \frac{\lambda}{5\mu} = \frac{12}{5\times 5} = \frac{12}{25} < 1 \quad \surd
$$

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \left[\frac{S^S\rho^{S+1}}{S!(1-\rho)} + \sum_{n=0}^{S}\frac{(S\rho)^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{5^5\left(\frac{12}{25}\right)^6}{5!\left(1-\frac{12}{25}\right)} + \sum_{n=0}^{5}\frac{(5\times\frac{12}{25})^n}{n!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{5^5\frac{12^6}{25^6}}{5!\frac{13}{25}} + \frac{(\frac{12}{5})^0}{0!} + \frac{(\frac{12}{5})^1}{1!} + \frac{(\frac{12}{5})^2}{2!} + \frac{(\frac{12}{5})^3}{3!} + \frac{(\frac{12}{5})^4}{4!} + \frac{(\frac{12}{5})^5}{5!}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{5^5 12^6.25}{5!.13.25^6} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{12^2}{2!5^2} + \frac{12^3}{3!5^3} + \frac{12^4}{4!5^4} + \frac{12^5}{5!5^5}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{6.12^4}{13.5^6} + 1 + \frac{12}{5} + \frac{6.12}{5^2} + \frac{2.12^2}{5^3} + \frac{6.12^2}{5^4} + \frac{6.12^3}{5^6}\right]^{-1} = \\
&= \left[\frac{6.12^4 + 13.5^6 + 12.13.5^5 + 6.12.13.5^4 + 2.12^2.13.5^3 + 6.12^2.13.5^2 + 6.12^3.13}{13.5^6}\right]^{-} \\
&= \left[\frac{18269}{13.5^3}\right]^{-1} = \frac{13.5^3}{18269}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P\left(W_q > 0\right) &= \frac{(S\rho)^S P_0}{S!(1-\rho)} = \\
&= \frac{\left(5\frac{12}{25}\right)^5 \frac{13.5^3}{18269}}{5!\left(1-\frac{12}{25}\right)} = \\
&= \frac{5^5\frac{12^5}{25^5}\frac{13.5^3}{18269}}{5!\frac{13}{25}} = \frac{5^5 12^5.13.5^3.25}{5!13.25^5.18269} = \\
&= \frac{6.12^3}{5.18269} \sim 0.11 \leq 0.2 \quad \surd
\end{aligned}
$$

Com 5 funcionários consegue-se ter a probabilidade de tempo de espera inferior a 20%.

c) (0.5 val.) Em termos médios e considerando 3 funcionários, qual o número médio de clientes à espera de ser atendido?

Resolução:

O número médio de clientes à espera de ser atendido é dado por:

$$L_q = \frac{S^S\rho^{S+1}P_0}{S!(1-\rho)^2}$$

com $S = 3$, $\rho = \frac{4}{5}$ e $P_0 = \frac{5}{89}$ (calculado na alínea anterior).

$$
\begin{aligned}
L_q &= \frac{S^S \rho^{S+1} P_0}{S!(1-\rho)^2} = \frac{3^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{3+1} \frac{5}{89}}{3! \left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3^3 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{5}{89}}{3! \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \\
&= \frac{3^3 4^4 5^3}{3! 5^4 89} = \frac{2.3^2 4^3}{5.89} = \frac{1152}{445} \sim 2.6
\end{aligned}
$$

O número médio de clientes à espera de ser atendido é cerca de 2.6 clientes.

FIM