e-Fólio A

Correcção Sumária

1. Para a resolução deste grupo é importante ter presente que a extracção do conjunto de 5 números é independente da extração das duas estrelas.

1.1.1. Existem

$$\binom{50}{5}\binom{11}{2}$$

possíveis chaves completas do Euromilhões, em que $\binom{50}{5}$ é o número de diferentes maneiras de se extrair 5 bolas entre 50 e $\binom{11}{2}$ é número de maneiras de se extrair 2 bolas entre 11 possíveis.

1.1.2. Se os dois números das estrelas constam do conjunto dos cinco números, então os restantes 3 números serão sorteados entre os restantes $50 - 2 = 48$ números possíveis, num total de

$$\binom{48}{3}$$

possibilidades. Mas há $\binom{11}{2}$ diferentes maneiras para se fixarem as duas estrelas. Logo, há um total de

$$\binom{48}{3}\binom{11}{2}$$

chaves completas do Euromilhões em que entre o conjunto dos cinco números constam os números sorteados nas estrelas.

1.1.3. Nesta alínea pretende-se determinar o número de chaves completas em que entre o conjunto dos cinco números constem dois, um, ou nenhum número inferior a 10.

Se nenhum número for inferior a 10, então os cinco números terão de ser escolhidos entre os números 10, 11, 12,..., 49, 50, num total de 41 possibilidades. Desta forma, existem

$$\binom{41}{5}\binom{11}{2}$$

chaves completas em que nenhum dos cinco números é inferior a 10.

Para as chaves completas com apenas um número inferior a 10 existem

$$9\binom{41}{4}\binom{11}{2}$$

possibilidades, pois o número inferior a 10 pode ser qualquer um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e os restantes 4 números terão de ser escolhidos entre os números 10, 11,..., 49, 50. Por um raciocínio semelhante, existem

$$\binom{9}{2}\binom{41}{3}\binom{11}{2}$$

diferentes chaves completas do Euromilhões em que entre os cinco números exactamente dois são inferiores a 10.

No total, existem assim

$$\left\{\binom{41}{5}+9\binom{41}{4}+\binom{9}{2}\binom{41}{3}\right\}\binom{11}{2}$$

diferentes chaves do Euromilhões em que no conjunto dos cinco números existem no máximo dois números inferiores a 10.

1.2. A probabilidade de sair um dos três primeiros prémios é igual à probabilidade de acertar no conjunto dos cinco números. Ou seja, é igual a

$$\frac{1}{\binom{50}{5}}.$$

1.3. Se o apostador acertou num dos números, então para ganhar o primeiro prémio terá de acertar nos restantes 4 números e, ainda, nas duas estrelas. Mas com a extracção da primeira bola ficaram $50-1=49$ bolas na tômbola. Logo, existem $\binom{49}{4}$ diferentes possibilidades para a extracção das restantes quatro bolas e $\binom{11}{2}$ diferentes maneiras para a extracção das duas estrelas, sendo a probabilidade de o apostador ganhar o primeiro prémio igual a

$$\frac{1}{\binom{49}{4}\binom{11}{2}}.$$

2.1. Considere os acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$A_i - \text{A carta } i \text{ é colocada no envelope correcto.}$$

Pretende-se determinar $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$. Para tal utilize-se o Teorema de Poincaré:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Uma vez que existem n envelopes e apenas um está endereçado correctamente,

$$P(A_i) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Para $P(A_i \cap A_j)$, $i > j$, tem-se

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i \,|\, A_j) P(A_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}, \tag{1}$$

pois se a carta j foi colocada correctamente no envelope, então somente um dos $n-1$ envelopes restantes está correctamente endereçado. Do mesmo modo, dados $i > j > k$

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_k) P(A_j \,|\, A_k) P(A_i \,|\, A_k \cap A_j) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2}, \tag{2}$$

pelo que, finalmente, e por um raciocínio semelhante,

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n-2} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}. \tag{3}$$

Notando que no somatório $\sum_{1\leq j<i\leq n} P(A_i \cap A_j)$ há $\binom{n}{2}$ termos todos com o valor dado por (1) e que, analogamente, no somatório $\sum_{1\leq k<j<i\leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)$ há $\binom{n}{3}$ termos todos com o valor dado por (2), resulta deste raciocínio que

$$\begin{aligned}
& P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \\
= \; & n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} + \binom{n}{3}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\
= \; & 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\
= \; & 1 + \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m!} \\
= \; & 1 - \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^{m}}{m!}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

2.2. Consideremos os acontecimentos

A – Exactamente k cartas são colocadas no envelope correcto,
B – k cartas são colocadas no envelope correcto,
C – $n-k$ cartas são colocadas incorrectamente nos envelopes.

Nesta alínea pretende-se calcular

$$P(A) = P(C \mid B)P(B).$$

Para o efeito, note-se que pelos cálculos realizados na alínea anterior tem-se que $P(C \mid B)$ é igual a

$$1 - \left(1 - \sum_{m=0}^{n-k}\frac{(-1)^m}{m!}\right) = \sum_{m=0}^{n-k}\frac{(-1)^m}{m!},$$

em que a expressão entre parêntesis é obtida tal como em (4), com n substituído por $n-k$. Isto, porque, se k cartas estão colocadas correctamente, então faltam colocar $n-k$ cartas e nenhuma destas $n-k$ cartas pode ser colocada correctamente. (Note que as $n-k$ cartas subjantes são independentes das k cartas já colocadas correctamente nos envelopes.)
Do mesmo modo, ainda pelos cálculos da alínea anterior, (3),

$$P(B) = \frac{1}{k!}.$$

Deste modo, a probabilidade pedida é igual a

$$P(A) = \frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{n-k}\frac{(-1)^m}{m!}.$$

3. Para a resolução deste grupo, designemos por

N_i – Número total de alunos da turma i
n_{ij} – Número de alunos da turma i que tiveram a nota j,

3.1. Para cada turma $i = 1, 2, 3$, a média das classificações é dada por

$$\bar{x}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=0}^{20} j n_{ij}.$$

Deste modo, a média das classificações finais na unidade curricular é igual a

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{N_1 + N_2 + N_3} \sum_{j=0}^{20} j(n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) \\
&= \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 + N_3\bar{x}_3}{N_1 + N_2 + N_3} \\
&= \frac{30 \times 13 + 35 \times 10 + 40 \times 9}{30 + 35 + 40} = 10.476.
\end{aligned}$$

Para a análise do desvio padrão, comece-se por notar que, relativamente à variância, tem-se para cada turma

$$s_i^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{j=0}^{20} n_{ij}(j - \bar{x}_i)^2 = \frac{1}{N_i} \sum_{j=0}^{20} n_{ij} j^2 - \bar{x}_i^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{20} (n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) j^2 = N_1(s_1^2 + \bar{x}_1^2) + N_2(s_2^2 + \bar{x}_2^2) + N_3(s_3^2 + \bar{x}_3^2).$$

Deste modo, em termos de todos os alunos inscritos na unidade curricular, a variância é igual a

$$\begin{aligned}
s^2 &= \frac{1}{N_1 + N_2 + N_3} \sum_{j=0}^{20} (n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) j^2 - \bar{x}^2 \\
&= \frac{N_1(s_1^2 + \bar{x}_1^2) + N_2(s_2^2 + \bar{x}_2^2) + N_3(s_3^2 + \bar{x}_3^2)}{N_1 + N_2 + N_3} - \bar{x}^2 \\
&= 7.166
\end{aligned}$$

e, assim, o desvio padrão é igual a $s = \sqrt{s^2} = 2.677$.

3.2. Designado por C a cotação da questão em causa, tem-se que a nova média é dada por

$$12 = \frac{1}{N_1 + N_2 + N_3} \left(\sum_{j=0}^{20} j(n_{1j} + n_{2j} + n_{3j}) + (N_1 + N_2 + N_3)C \right) = \bar{x} + C.$$

Isto significa que a questão tinha a cotação $C = 12 - 10.476 = 1.524$ valores. Deste modo, rectificadas as classificações finais, a nova classificação do aluno da Turma 1 é de $10 + 1.524 = 11.524$ valores (12 valores).