Investigação Operacional | 21076

Período de Realização

Decorre dia 30 de Junho de 2023, das 10:00 às 11:30

Data de Limite de Entrega

30 de Junho de 2023, até às 12h30 de Portugal Continental

Tema

Programação linear, filas de espera, gestão de processos, simulação

Competências

Deve demonstrar ter capacidade para aplicar na resolução de problemas os vários métodos estudados nos temas acima.

Trabalho a desenvolver

Deve resolver os exercícios propostos no enunciado, de forma clara e sucinta, com rigor científico e justificação adequada das respostas.

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total do e-Fólio Global é de 12 valores distribuídos de acordo com a tabela seguinte.

questão	1	2	3	4
cotação	3	3	3	3

2. Para a correção das questões constituem critérios de primordial importância, além da óbvia correção científica das respostas:
   - justificações de todos os passos da resolução;
   - capacidade de escrever clara, objectiva e corretamente;
   - capacidade de estruturar logicamente as respostas;
   - capacidade de desenvolver e de apresentar os cálculos e o raciocínio matemático corretos, utilizando notação apropriada.
3. Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efectuar.

   Todas as justificações terão de ser escritas por palavras do próprio.

   A bibliografia consultada terá de ser mencionada.

   Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
4. **Não serão aceites respostas obtidas por meio de software, de qualquer tipo.**

Normas a respeitar

A prova e-Fólio Global (destinada aos estudantes que optaram pela modalidade de avaliação contínua e obtiveram pelo menos 3,5 valores na soma das notas dos e-fólios) terá a duração de 90 minutos, à qual acresce um período de tolerância de 60 minutos.

A tolerância destina-se à revisão e formatação da resolução em pdf, tendo como objetivo principal assegurar a respetiva submissão atempada.

Deve redigir o seu e-Fólio Global na Folha de Resolução disponibilizada e preencher todos os dados do cabeçalho.

Caso não realize o seu e-Fólio Global por escrito mas num outro formato, preencha igualmente o cabeçalho da Folha de Resolução e declare nela que terminou o seu trabalho até à data e hora determinada pelo professor.

Todas as páginas do documento devem ser numeradas.

O seu e-Fólio Global não deve ultrapassar **dez** páginas A4.

Nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do e-Fólio Global, segundo o exemplo apresentado: 000000eFolioGlobal.

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo e-Fólio Global até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

Uma vez feita a submissão da resolução no dispositivo do e-Fólio Global, já não será possível retirá-lo e substituí-lo por outro.

O ficheiro a enviar não deve exceder 8 MB.

Votos de bom trabalho!

Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Clarence Protin

Enunciado

Justifique todas as afirmações e apresente os cálculos realizados para as obter.

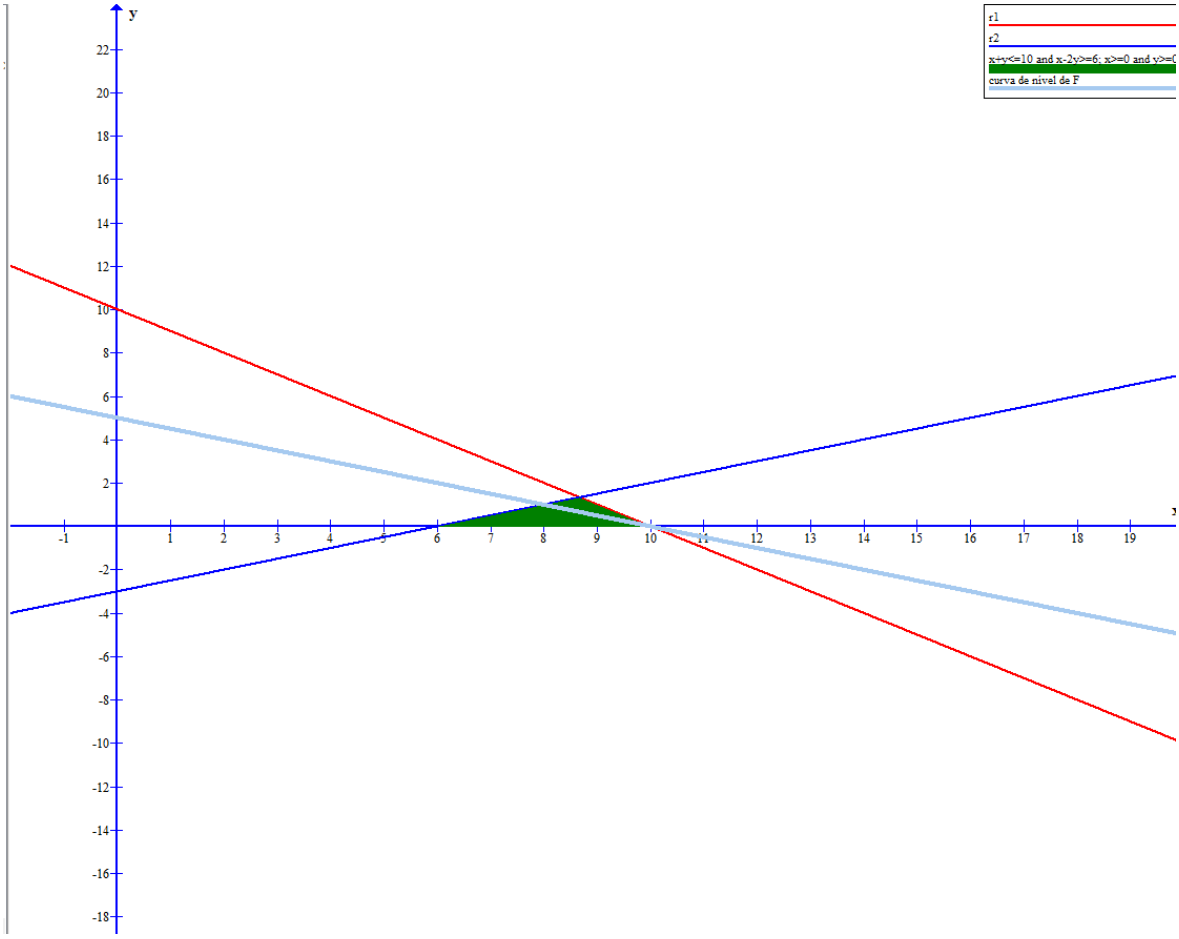
1 (3 val.) Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\max F = X + 2Y$$

$$\text{sujeito a} \begin{cases} X + Y \leq 10 \\ X - 2Y \geq 6 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

a) Resolva-o graficamente, justificando todos os passos.

Resolução:
A reta $X + Y = 10$ passa nos pontos $(0, 10)$ e $(10, 0)$.
A reta $X - 2Y = 6$ passa nos pontos $(0, -3)$ e $(6, 0)$.



As retas de nível da função F são dadas pelas retas $X + 2Y = z$ para algum $z \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$Y = -\frac{X}{2} + \frac{z}{2}.$$

Assim, o valor da função F aumenta à medida que aumenta o valor de z. Na figura acima, pode ver-se uma curva de nível (reta azul claro). Assim, o ponto ótimo é o ponto que está na intersecção das retas r_1 e r_2:

$$\left\{ \begin{array}{l} X + Y = 10 \\ X - 2Y = 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} --- \\ X = 2Y + 6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2Y + 6 + Y = 10 \\ --- \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3Y = 4 \\ --- \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} Y = \frac{4}{3} \\ X = \frac{8}{3} + 6 = \frac{26}{3} \end{array} \right.$$

$$(X^*, Y^*) = \left(\frac{26}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

com $F^* = F(X^*, Y^*) = \frac{26}{3} + 2 \times \frac{4}{3} = \frac{34}{3}$.

b) Utilize o método do simplex para resolver o problema, justificando todos os passos.
Indique, justificando, se a solução é única.

Resolução:

Problema na forma standard:

$$\max F = X + Y + 0F_1 + 0F_2 - M\alpha$$
$$\text{s.a.} \begin{cases} X + Y + F_1 = 10 \\ X - 2Y - F_2 + \alpha = 6 \\ X, Y, F_1, F_2, \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Como o problema tem uma desigualdade $\geq$, na forma standard é necessário acrescentar uma variável artificial na segunda restrição. O problema vai ser resolvido pelo método das penalidades.

operação	base	X	Y	F_1	F_2	α	TI	Δ_i
	F_1	1	1	1	0	0	10	
		1	-2	0	-1	1	6	
$l_3 - Ml_2$	$-F$	-1	-2	0	0	M	0	
$l_1 - l_2$	F_1	1	1	1	0	0	10	10
	α	1	-2	0	-1	1	6	6 $\leftarrow$
$l_3 + (1+M)l_2$	$-F$	-1-M	-1+2M	0	M	0	-6M	
		$\uparrow$						
$\frac{1}{3}l_1$	F_1	0	3	1	1	-1	4	$\frac{4}{3}$ $\leftarrow$
$l_2 + \frac{2}{3}l_1$	X	1	-2	0	-1	1	6	
$l_3 + \frac{4}{3}l_1$	$-F$	0	-4	0	-1	1+M	6	
			$\uparrow$					
	Y	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	
	X	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{26}{3}$	
	$-F$	0	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3} + M$	$\frac{34}{3}$	

Em cada passo do método, escolhe-se para entrar na base a variável que apresenta o valor negativo mais baixo na linha de $-F$. Sai da base a variável que apresenta o valor Δ_i mais baixo.

Como na linha da função $-F$ já não há valores negativos, o método do simplex termina, tendo sido obtido o valor máximo de F, $F^* = \frac{34}{3}$,

quando $X^* = \frac{4}{3}$ e $Y^* = \frac{26}{3}$.
Note-se que o valor na linha de $-F$ correspondente às variáveis de folga F_1 e F_2 (variáveis não básicas) é não nulo. Assim, temos a garantia que a solução óptima é única.

c) O que se poderia concluir se a função objectivo fosse $\max F = X + Y$?

Resolução:

A função $F = X+Y$ tem as retas de nível paralelas à aresta do polígono admissível que passa em $\left(\frac{4}{3}, \frac{26}{3}\right)$ e em $(10, 0)$. Assim, todos os ponto dessa aresta são solução óptimas.

2 (3 val.) No posto de correios da esquina, a chegada dos clientes segue uma distribuição Poissoniana com taxa média de chegada de 10 clientes por hora. Estima-se que A duração de cada atendimento segue distribuição Exponencial com valor médio igual a 5 minutos. Sabendo que o sistema funciona com um servidor e que não pode ter no interior mais do que 4 clientes, determine:

a) a probabilidade do posto dos correios estar vazio;

Resolução:
Trata-se de um sistema $M/M/1/4$ (População=∞) porque tanto o processo de chegada de utentes como o tempo de atendimento correspondem a processos Poissonianos. O número de servidores é 1.
Processo de chegada Poissoniano com uma taxa de chegadas $\lambda = \frac{1}{6}$ clientes por minuto (10 clientes por hora).
Duração do serviço com distribuição Exponencial com taxa de atendimento de $\mu = \frac{1}{5}$ clientes por minuto (5 minutos por atendimento).
População de clientes ilimitada.
Fila máxima =3 porque só podem estar $K = 4$ clientes no posto dos correios.
Disciplina da fila: FIFO (first in first out).

Sendo $\lambda = \frac{1}{6}$ e $\mu = \frac{1}{5}$, sai que a taxa de pressão é dada por

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{6} < 1 \quad \surd$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{4+1}} = \frac{1-\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^5} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{6^5-5^5}{6^5}} = \frac{6^5}{6(6^5-5^5)} = \frac{6^4}{6^5-5^5} \sim 27.86\%$$

b) a probabilidade do posto dos correios estar cheio;

Resolução:

O posto dos correios está cheio quando tem 4 pessoas.

$$P_4 = \rho^4 P_0 = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{6^4}{6^5-5^5} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \frac{5^4 6^4}{6^4(6^5-5^5)} = \frac{5^4}{6^5-5^5} \sim 13.44\%$$

c) o tempo médio de permanência de um cliente no sistema e na fila em espera.

Resolução:

O tempo médio de permanência no sistema é $W = \frac{L}{\overline{\lambda}}$.

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{5}{6}} - \frac{5\left(\frac{5}{6}\right)^5}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^5} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} - \frac{\frac{5^6}{6^5}}{\frac{6^5-5^5}{6^5}} = \\ &= 5 - \frac{5^6}{6^5-5^5} = \frac{5.6^5-2.5^6}{6^5-5^5} \sim 1.6405 \end{aligned}$$

$$\overline{\lambda} = \lambda(1-P_K) = \lambda(1-P_4) = \frac{1}{6}\left(1-\frac{5^4}{6^5-5^5}\right) = \frac{1}{6}\frac{6^5-5^5-5^4}{6^5-5^5} = \frac{6^5-5^5-5^4}{6(6^5-5^5)} \sim 1.443$$

Assim, sai que

$$W = \frac{L}{\overline{\lambda}} = \frac{\frac{5.6^5-2.5^6}{6^5-5^5}}{\frac{6^5-5^5-5^4}{6(6^5-5^5)}} = \frac{(5.6^5-2.5^6)(6(6^5-5^5))}{(6^5-5^5)(6^5-5^5-5^4)} = \frac{30.6^5-12.5^6}{6^5-5^5-5^4} \sim 11.37 \text{ minutos}$$

O tempo médio de permanência na fila de espera é $W_q = \frac{L_q}{\overline{\lambda}}$ ou $W_q = W - \frac{1}{\mu}$.

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{30.6^5-12.5^6}{6^5-5^5-5^4} - \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{30.6^5-12.5^6}{6^5-5^5-5^4} - 5 \sim 6.37 \text{ minutos}$$

3 (3 val.) Considere o empreendimento com as características indicadas no quadro seguinte.

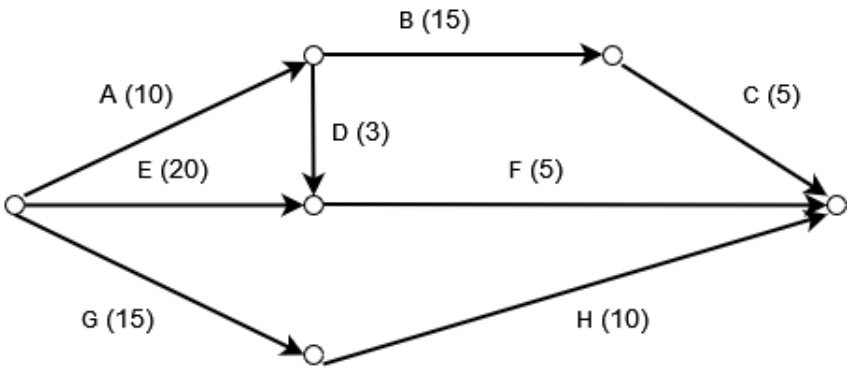
Actividade	Precedências	Duração
A	—	10
B	A	15
C	B	5
D	A	3
E	—	20
F	D, E	5
G	—	15
H	G	10

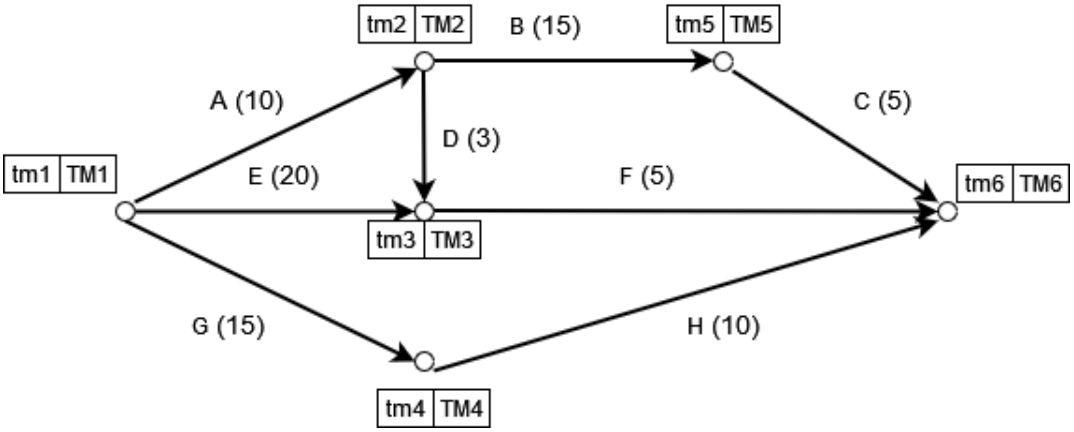
Determine, justificando, a duração total média do empreendimento e o caminho crítico médio do empreendimento.

O caminho crítico deve ser calculado usando o diagrama de rede e o cálculo dos tempos mais cedo e mais tarde em cada nó.

Resolução:

Existem 3 actividades sem precedências, portanto sabemos que essas saem do nó inicial: A, E e G. As actividades que vão ter ao nó final são aquelas que não são precedência de nenhuma outra actividade: C e H.



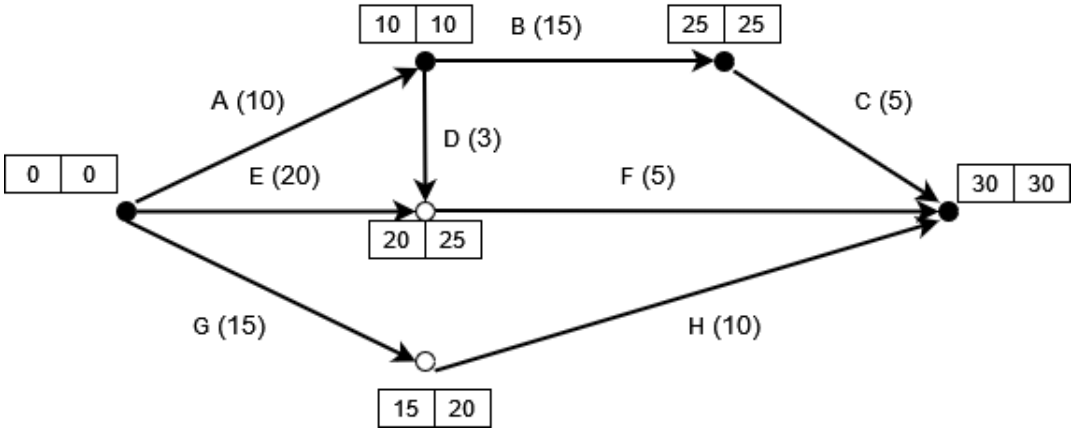


Vamos agora calcular os tempos mais cedo e os tempos mais tarde.

Tempos mais cedo (tm)
$tm_1 = 0$ (nó inicial)
$tm_2 = tm_1 + 10 = 10$
$tm_3 = \max\{tm_1 + 20, tm_2 + 3\} = \max\{20, 13\} = 20$
$tm_4 = tm_1 + 15 = 15$
$tm_5 = tm_2 + 15 = 25$
$tm_6 = \max\{tm_5 + 5, tm_3 + 5, tm_4 + 10\} = \max\{30, 25, 25\} = 30$

Tempos mais tarde (TM)
$TM_6 = tm_6 = 30$ (nó final)
$TM_5 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_4 = TM_6 - 10 = 20$
$TM_3 = TM_6 - 5 = 25$
$TM_2 = \min\{TM_5 - 15, TM_3 - 3\} = \min\{10, 22\} = 10$
$TM_1 = \min\{TM_2 - 10, TM_3 - 20, TM_4 - 15\} = \min\{0, 5, 5\} = 0$

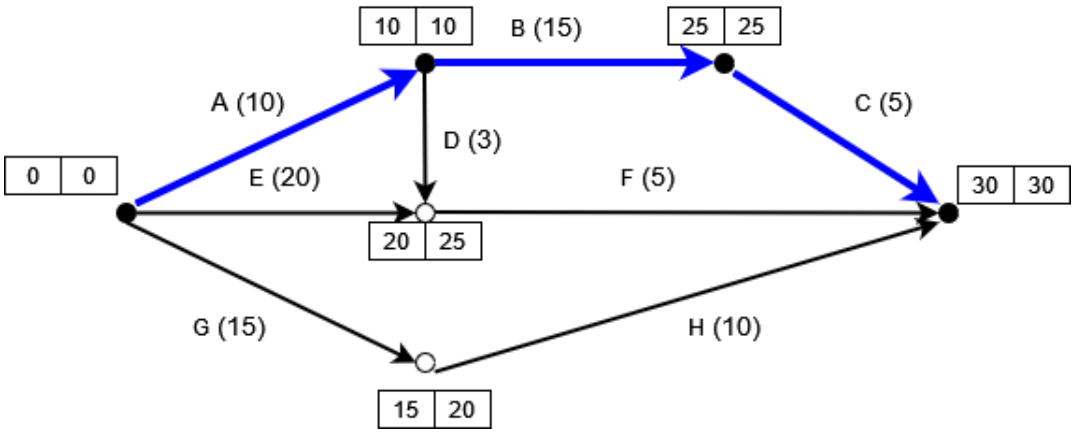
Conclui-se assim que a duração total do projecto é 30 unidades de tempo.
Usando a informação dos tempos mais cedo e mais tarde, obtemos:



Marcou-se a preto os nós críticos, em que o tempo mais cedo e o tempo mais tarde são iguais. Temos 4 nós críticos: 1, 2, 5 e 6. As actividades que unem estes nós são candidatas a actividades críticas. Para serem actividades críticas, a diferença entre os tempos mais cedo (ou mais tarde) entre o nó final e o nó inicial tem de ser igual à duração da actividade (para não haver folgas).

Actividade	tm(i+1)-tm(i)	Duração	Conclusão
A	$tm_2 - tm_1 = 10$	10	actividade crítica
B	$tm_5 - tm_2 = 25 - 10 = 15$	15	actividade crítica
C	$tm_6 - tm_5 = 30 - 25 = 5$	5	actividade crítica

Conclui-se que as actividades A, B e C são críticas. Assim, o caminho crítico é composto pelas actividades A, B e C.



4 (3 val.) O tempo de espera (em horas) num determinado estabelecimento é dado pela variável aleatória X com a função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2}{7}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{7}, & 1 \leq x < 4 \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}$$

Elabore uma rotina que lhe permita gerar números pseudo-aleatórios com a distribuição X, ou seja, simular o tempo de espera, recorrendo ao Método da Inversão. Apresente o fluxograma associado.

Resolução:

Sendo dada a função densidade de probabilidade, teremos de calcular a função distribuição de probabilidade.

Para $x < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para $0 \leq x < 1$, tem-se

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{x} f_X(t)\, dt = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{2}{7} t\, dt = \\ &= 0 + \frac{1}{7}\left[t^2\right]_0^x = \\ &= \frac{1}{7}x^2 \end{aligned}$$

Para $1 \leq x < 4$, tem-se

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{1} f_X(t) + \int_{1}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{7} t\, dt + \int_{1}^{x} \frac{2}{7}\, dt = \\
&= 0 + \frac{1}{7}\left[t^2\right]_0^1 + \frac{2}{7}\left[t\right]_1^x = \\
&= \frac{1}{7} + \frac{2}{7}(x-1) = \\
&= \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Para $x \geq 4$, tem-se

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} f_X(t)\, dt + \int_{0}^{1} f_X(t) + \int_{1}^{4} f_X(t)\, dt + \int_{4}^{x} f_X(t)\, dt = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{1} \frac{2}{7} t\, dt + \int_{1}^{4} \frac{2}{7}\, dt + \int_{4}^{x} 0\, dt = \\
&= 0 + \frac{1}{7}\left[t^2\right]_0^1 + \frac{2}{7}\left[t\right]_1^4 + 0 = \\
&= \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{7}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}, & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Assim, gerando um número pseudo-aleatório $u \in [0, 1]$, teremos o seguinte.

Se $u \leq F_X(1) = \frac{1}{7}$ (isto é para $x \in \left[0, \frac{1}{7}\right]$), teremos de inverter a expressão $u = \frac{1}{7}x^2$:

$$u = \frac{1}{7}x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{7u}.$$

Como $x \in [0,1]$, temos que $x \geq 0$ e portanto $x = \sqrt{7u}$.

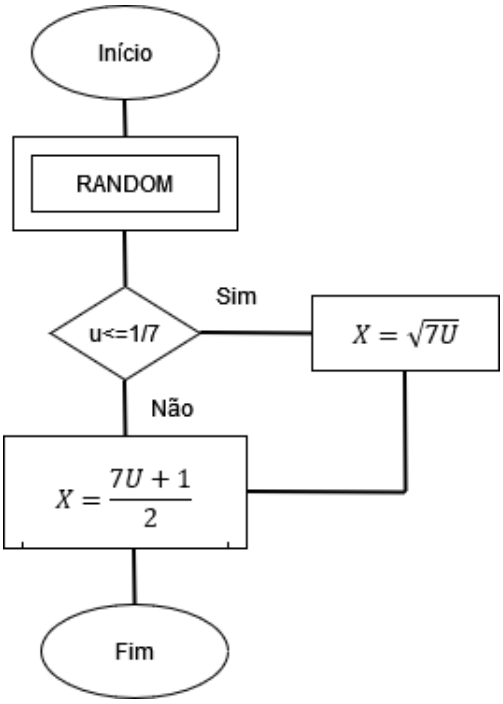
Se $F_X(1) \leq u \leq F_X(4) \Leftrightarrow \frac{1}{7} \leq u \leq 1$ (isto é, para $x \in [1,4]$), teremos de inverter a expressão $u = \frac{2}{7}x - \frac{1}{7}$:

$$u = \frac{2}{7}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}\left(u + \frac{1}{7}\right) = \frac{7}{2}u + \frac{1}{2}.$$

Assim, gerada a variável pseudo-aleatória $U \in [0,1]$, obtemos a variável pseudo-aleatória X com a distribuição pretendida.

$$NPAX = \begin{cases} \sqrt{7U}, & U \leq \frac{1}{7} \\ \frac{7}{2}U + \frac{1}{2} & U > \frac{1}{7} \end{cases}$$

E temos o fluxograma associado.



FIM