Matemática Preparatória | Resolução E-fólio B

Resolução

1. Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}$

   Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Levantemos a indeterminação:
   $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{\lim_{x\to 0}(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times 2)}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{2\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} = \dfrac{2\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}{1} = 2$. Acima, procedeu-se à seguinte mudança de variável: dado que "Se $x \to 0$ então $2x \to 0$", tomamos $y = 2x$ e temos que $y \to 0$.

   (b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3}$

   Resolução: Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
   $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{2x+3} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x^2})}}{2x+3} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x(2+\frac{3}{x})} = \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}} = \dfrac{1-0}{2+0} = \dfrac{1}{2}$.

2. Considere a função real de variável real

   $$f(x) = \begin{cases} 2\cos^2(x) & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^3}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade da função f em $x = 0$.

   Resolução: Para que a função seja contínua em $x = 0$ é preciso que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Temos que $f(0) = 2\cos^2(0) = 2 \times 1 = 2$ e $\lim_{x\to 0^+}(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{x^3}{2}) = \frac{e^0}{4} + \frac{0}{2} = \frac{1}{4}$. Como

$f(0) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$ concluímos que a função f não é contínua em $x = 0$.

(b) Indique, justificando, se a função é diferenciável em x=0.

Resolução: Como f não é contínua em $x = 0$ não é diferenciável em $x = 0$.

3. Usando as regras de derivação, calcule a derivada da função

$$g(x) = 2e^{3x} sen(x^2 + 1)$$

Resolução: $g'(x) = (2e^{3x} sen(x^2+1))' = (2e^{3x})' sen(x^2+1) + 2e^{3x} sen'(x^2+1) = 2(3x)' e^{3x} sen(x^2+1) + 2e^{3x}(x^2+1)' \cos(x^2+1) = 6e^{3x} sen(x^2+1) + 4e^{3x} x \cos(x^2+1)$

4. Calcule, usando a definição de derivada num ponto, a derivada da função $h(x) = 3\cos(2x)$ no ponto de abcissa $x = 0$.

Resolução: $h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(2x)-3\cos(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cos(2x)-3}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(cos(2x)-1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3(cos(2x)-1)(\cos(2x)+1)}{x(\cos(2x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3(cos^2(2x)-1)}{x(\cos(2x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{3(-sen^2(2x))}{x(\cos(2x)+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)}{2x} \times 2 \times \lim_{x\to 0} \frac{3\times(-sen(2x))}{\cos(2x)+1} = \lim_{y\to 0} \frac{sen(y)}{y} \times 2 \times \frac{3\times(-sen(2\times 0))}{\cos(2\times 0)+1} = 1 \times 2 \times \frac{3\times 0}{2} = 1 \times 2 \times 0 = 0.$

Acima usamos a igualdade $sen^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$ ou seja $cos^2(2x) - 1 = -sen^2(2x)$; e usámos a mudança de variável $y = 2x$. Como $x \to 0$, temos $2x \to 0$, logo $y \to 0$.

5. Considere um armário de cozinha com as seguintes dimensões: altura 1,10m; largura 50cm e profundidade 40cm. Será possível esconder um cabo de esfregona que meça 1,25m nesse armário? Apresente o seu raciocínio.[1]

Resolução: Comecemos por verificar se o cabo de esfregona cabe encostada à parede do armário na diagonal. Uma vez que o armário

[1] Não entre em conta com a espessura do cabo, que se considera negligenciável.

tem 110 cm de altura e 50 cm de largura, a diaginal d verificará $d^2 = 110^2 + 50^2 = 14600$, logo $d = \sqrt{14600} \approx 120.83$, o que não é suficiente para colocar o cabo de esfregona que mede 125 cm. Contudo podemos tentar tirar partido da profundidade do armário, ou seja, tentar colocar o cabo da esfregona do vértice de baixo para o vértice oposto em cima. O comprimento desta diagonal tridimensional t é dada por $t^2 = d^2 + 40^2$ uma vez que um cateto é a diagonal d calculada anteriormente e o outro cateto é a profundidade do armário.

Mas então $t^2 = d^2 + 40^2 \approx 120.83^2 + 40^2 \approx 16199$, logo $t \approx \sqrt{16199} \approx 127.27$. [Notem que estamos a lidar com medidas e portanto apenas com números não negativos.] Mas então a resposta é sim, é possível esconder um cabo de esfregona que meça 125 cm num armário com as dimensões dadas, pois tem uma diagonal tridimensional com aproximadamente 127.27 cm.

FIM