Álgebra Linear II | 21003

Proposta de resolução

1. **(2,2 valores)** Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno

$$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + 4x_3y_3 + x_3y_4 + x_4y_3 + 4x_4y_4$$

(vocês podem assumir sem justificação que este é um produto interno.)

Sejam $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$, com

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine

a. **(1,6 valores)** uma base ortonormada de F usando o processo de Gram-Schmidt;

Resolução: Vamos escolher $u_1 = v_1$. Porque $||u_1|| = \sqrt{u_1|u_1} = \sqrt{1+4+4} = 3$, normalizamos u_1 para obter

$$n_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Pelo processo de Gram-Schmidt, calculamos um vector ortogonal

$$u_2 = v_2 - \langle n_1, v_2 \rangle n_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(-1-4) \left[\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Porque $||u_2|| = \sqrt{16+64+100}/9 = \sqrt{20/9}$, temos

$$n_2 = \sqrt{9/20}u_2 = \sqrt{1/180} \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o processo mais uma vez, obtemos

$$u_3 = v_3 - \langle n_1, v_3\rangle n_1 - \langle n_2, v_3\rangle n_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3}(1-2+1)\left[\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right] - \sqrt{\frac{1}{180}}(-4+8+5)\left[\sqrt{\frac{1}{180}}\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 - \frac{1}{20}\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 24 \\ -12 \\ -20 \\ 5 \end{bmatrix},$$

e normalizamos para obter

$$n_3 = \frac{u_3}{||u_3||} = \frac{20u_3}{\sqrt{576+144+1600-100-100+100}} = \frac{1}{\sqrt{2220}}\begin{bmatrix} 24 \\ -12 \\ -20 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Então (n_1, n_2, n_3) é uma base ortonormada de F.

b. **(0,6 valores)** uma base do subespaço $F^\perp$.

Resolução: Os elementos de $F^\perp$ são os vetores $(w, x, y, z)^T \in R^4$ ortogonais aos geradores de F, isto é, tais que

$1w + 2x + 4 \cdot 0y + 0z + (-1)y + 4(-1)z = 0,$

$(-1)w + (-2)x + 4 \cdot 0y + 0z + 0y + 4 \cdot 0z = 0,$

$1w + (-1)x + 4(-1)y + (-1)z + 0y + 4 \cdot 0z = 0.$

$\Leftrightarrow w + 2x - y - 4z = 0, -w - 2x = 0, w - x - 4y - z = 0$

Então, $w = -2x$, portanto $0 = w + 2x - y - 4z = -2x + 2x - y - 4z = -y - 4z$, e $y = -4z$. Além disso, $0 = w - x - 4y - z = -2x - x + 16z - z = -3x + 15z$ e pois $x = 5z$, e $w = -10z$.

Come a dimensão de $F^\perp = 4 - \dim F = 1$, concluimos que $F^\perp = \{(-10z, 5z, -4z, z)^T : z \in \mathbb{R}\}$ com base $((-10, 5, -4, 1)^T)$.

2. (1,8 valores) Considere que $\mathbb{R}^2$ está munido do produto interno

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + \frac{x_1y_2 + x_2y_1}{4} + 2x_2y_2$$

(vocês podem assumir sem justificação que este é um produto interno.)
Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o endomorfismo $f((x, y)) = (2x, 4y)$.

Determine f^*, o endomorfismo adjunto de f. Escreva sua resposta como uma fórmula $f^*((x_1, x_2)) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$.

Resolução: Relativamente à base canónica $\mathcal{B}_c$, temos

$$\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos fazer uma mudança de base $\mathcal{B}_c$ para uma base ortonormada $\mathcal{B}'$, de forma a poder usar os resultados para matrizes em bases ortonormadas.

Para encontrar $\mathcal{B}'$, começamos (arbitrariamente) com $u_1 = (1, 0)$ e procuramos um vetor ortogonal $u_2 = (y_1, y_2)$. Temos $0 = \langle u_1, u_2 \rangle = y_1 + \frac{y_2}{4}$. Com $y_2 = 4$, obtemos $(y_1, y_2) = (-1, 4)$. Porque $||u_1|| = \sqrt{1^2} = 1$, e $||u_2|| = \sqrt{(-1)^2 + \frac{(-1)4+4(-1)}{4} + 2 \cdot 4^2} = \sqrt{31}$, uma escolha adequada para $\mathcal{B}'$ é $((1, 0), (\frac{-1}{\sqrt{31}}, \frac{4}{\sqrt{31}}))$.

Seja P a matriz de mudança da base $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}_c$. Logo

$$P = \mathcal{M}(\mathrm{Id}, \mathcal{B}', \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{31}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{31}} \end{bmatrix},$$

cuja inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{31}}{4} \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa f com respeito à base $\mathcal{B}'$ é

$$D = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}', \mathcal{B}')$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{31}}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{31}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{31}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \sqrt{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{31}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{31}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{\sqrt{31}} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Estando numa base ortonormada, o endomorfismo adjunto de f será representado pela matriz

$$D^* = \mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{31}} & 4 \end{bmatrix}.$$

Para expressar f^* na forma exigida, temos que reverter para a b.c.

$$\mathcal{M}(f^*, \mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{\sqrt{31}} \\ 0 & \frac{4}{\sqrt{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{31}} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{31}}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{60}{31} & \frac{-4}{\sqrt{31}} \\ \frac{8}{31} & \frac{16}{\sqrt{31}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{31}}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{31} & \frac{-16}{31} \\ \frac{8}{31} & \frac{126}{31} \end{bmatrix}$$

isto é $f^*((x_1, x_2)) = (\frac{60}{31}x_1 - \frac{16}{31}x_2, \frac{8}{31}x_1 + \frac{126}{31}x_2)$.

FIM