Atividade Formativa 1

Enunciado

1. Determine, caso existam, o ínfimo, o supremo, o mínimo e o máximo do conjunto
$$\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. Por recurso ao método de indução matemática prove que
$$(n!)^2 > n^2\, 2^n, \quad \forall\, n \geq 4.$$

3. Considere a sucessão (a_n) definida por recorrência por
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_{n+1} = (a_n^2 + 1)\frac{a_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

3.1. Mostre que
$$a_n \in \left]0, 1\right[, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

3.2. Verifique que a sucessão (a_n) é decrescente.

3.3. Conclua que a sucessão (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

3.4. Supondo que (a_n) é uma subsucessão de uma sucessão limitada (b_n), será que se pode concluir que (b_n) é convergente?

4. Considere a sucessão (u_n) definida por
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = (n^2 + 1)u_n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

4.1. Mostre que para todo o $n \in \mathbb{N}$ tem-se
$$\frac{u_n}{n!} \geq 2.$$

4.2. Estude a monotonia da sucessão (u_n).

4.3. Será que existe algum termo da sucessão igual a 150?

4.4. Analise a existência de limite da sucessão (u_n).

5.

5.1. Mostre que

$$0 < (n+1)^{1/4} - n^{1/4} \leq n^{-3/4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

5.2. Utilize (1) para calcular o limite

$$\lim_n (\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}).$$

6. Determine a natureza de cada uma das seguintes séries (divergente, simplesmente convergente, absolutamente convergente):

6.1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^3+2n^2+2}}$

6.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n-2\sqrt{n}}\right)^n$

6.3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right)^n n!$

6.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

7. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{(n+1)^{\alpha+1}}.$$

Verifique que:

7.1. A série é absolutamente convergente se, e só se, $\alpha > 2$.

7.2. Para $\alpha \leq 1$, a série diverge.

8. Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série divergente, ambas de termos não negativos. Relativamente a cada uma das seguintes afirmações, indique, justificando, o seu valor lógico (verdadeiro / falso):

8.1. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+b_n}$ é convergente.

8.2. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n + \frac{1}{b_n}\right)$ é convergente.