21166 - História da Matemática

Ano lectivo 2019/20
Docente: António Araújo

e-fólio A (20 a 27 de novembro)

,

Para a resolução do e-fólio, aconselha-se que:

- Verifique se o ficheiro que recebeu está correcto. O e-fólio consiste de 1 página com 4 problemas e termina com a palavra FIM.
- **A resolução deve ser inteiramente manuscrita.** Como o e-fólio tem um tempo prolongado de resolução, espera-se que as respostas que enviar estejam impecavelmente legíveis, com boa apresentação e organização. Deve fazer à parte o trabalho auxiliar e enviar apenas uma versão final, "limpa". Deve digitalizar ou fotografar a sua resolução de forma legível, e entregar de preferência em pdf, embora se aceitem scans ou fotografias em jpeg ou png. Se usar varios ficheiros envie apenas um arquivo com todos eles, em rar ou zip. Respostas ilegíveis não serão cotadas, por isso verifique bem o seu ficheiro antes de enviar.
- Justifique cuidadosamente todas as suas respostas. Apresente todos os cálculos que julgue necessários para a compreensão do seu raciocínio.
- Tenha em atenção o prazo de entrega do e-fólio e as indicações para submeter a resolução disponibilizadas na sala de aulas virtual.
- O e-fólio é um trabalho individual. Pode utilizar recursos externos (pesquisa online, literatura, etc) mas não pode pedir ajuda a terceiros nem discutir os problemas com os seus colegas.

Critérios de avaliação e cotação:

- Este e-fólio tem a cotação total de 4 valores. Cada problema vale 1 valor.

Problema 1. *Utilizando os métodos do antigo Egipto calcule:*

a) O produto de 17 por 13.

b) A divisão exacta de 63 por 24.

Solução:

a)

$$\begin{array}{ccc} * & 1 & 13 \\ & 2 & 26 \\ & 4 & 52 \\ & 8 & 104 \\ * & 16 & 208 \\ \hline & 17 & 221 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 24 \\ * & 2 & 48 \\ * & \bar{2} & 12 \\ & \bar{4} & 6 \\ * & \bar{8} & 3 \\ \hline & 2+\bar{2}+\bar{8} & 63 \end{array}$$

Problema 2. *a) Aplique o algoritmo que obteve na AF1 para calcular uma expansão unitária de $\frac{7}{11}$. Compare com a expansão decimal do mesmo número, e comente se existe alguma vantagem aparente na expansão unitária.*

b) Calcule uma expansão unitária de $\frac{7}{11}$ que inclua o termo $\frac{1}{3}$.

Solução:

Aplicando o algoritmo com $r_0 = \dfrac{7}{11}$, vem

$$n_1 = [\frac{1}{r_0}] + 1 = 2$$

$$r_1 = \frac{7}{11} - \frac{1}{2} = \frac{3}{22}$$

$$n_2 = [\frac{1}{r_2}] + 1 = 8$$

$$r_2 = \frac{3}{22} - \frac{1}{8} = \frac{1}{88}$$

Como o resto é já uma fracção unitária temos:

$$\frac{7}{11} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{88}$$

Comparemos com a expansão decimal, $7/11 = 0,636363.....$ A vantagem é neste caso evidente: a expansão em base 10 é infinita, e a unitária é finita. (Claro que as fracções decimais têm outras vantagens.)

b) A melhor maneira de garantir a presença desse termo é forçá-lo. Começamos por subtrair 1/3 à fracção inicial

$$\frac{7}{11} - \frac{1}{3} = \frac{10}{33}$$

De seguida aplicamos o algoritmo ao resto, $\frac{10}{33}$. Obtemos

$$\frac{10}{33} = \frac{1}{4} + \frac{1}{19} + \frac{1}{2508}$$

Então

$$\frac{7}{11} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{19} + \frac{1}{2508}$$

Isto pode ser visto como uma perturbação da expansão que já tínhamos obtido, com a substituição do termo $1/2$ por $1/3$.

De notar que esta expansão não é a mais "simples", apenas a mais directa. Podíamos também escrever

$$7/11 = 1/3 + 1/6 + 1/8 + 1/88$$

por exemplo.

Problema 3. *Efectue as operações indicadas sobre os seguintes números apresentados na notação de Neugebauer. Apresente os resultados em notação de Neugebauer e de seguida em numeração cuneiforme.*

a) $1;33,28 + 2,2;27$

b) $3;10 \times 1;20$

Solução:

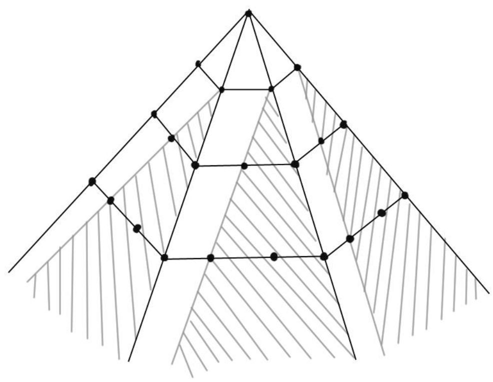
$1;33,28 + 2,2;27 = (1 + 33 \times 60^{-1} + 28 \times 60^{-2}) + (2 \times 60 + 2 + 27 \times 60^{-1})$
$= 2 \times 60 + 3 + 60 \times 60^{-1} + 28 \times 60^{-2}$
$= 2 \times 60 + 4 + 28 \times 60^{-2}$
$= 2,4;0,28$

b)

$3;10 \times 1;20 = (3 + 10 \times 60^{-1}) \times (1 + 20 \times 60^{-1})$
$= 3 + 3 \times 20 \times 60^{-1} + 10 \times 60^{-1} + 10 \times 20 \times 60^{-2}$
$= 3 + 60 \times 60^{-1} + 10 \times 60^{-1} + 200 \times 60^{-2}$
$= 4 + 10 \times 60^{-1} + (3 \times 60 + 20) \times 60^{-2}$
$= 4 + 10 \times 60^{-1} + 3 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2}$
$= 4 + 13 \times 60^{-1} + 20 \times 60^{-2}$
$= 4;13,20.$

Problema 4. *Encontre uma fórmula explícita em função de k para o valor do k-ésimo número pentagonal, que seja válida para todo o $k > 1$. Justifique algebricamente e graficamente a sua fórmula em termos da construção iterativa dos números pentagonais que discutimos na AF1.*

Solução: A partir do seguinte diagrama retiramos uma relação entre os números pentagonais e os números triangulares.



Nomeadamente,

$$P_k = 3t_{k-1} + k, k > 1.$$

Mas já tínhamos demonstrado na actividade formativa 2 que

$$t_k = k(k+1)/2.$$

Então

$$P_k = \frac{k(3k-1)}{2},\ k > 1.$$

que é uma forma explícita em termos de k, como pretendido.

Em alternativa também podiam ter usado a relação $P_k = T_k + 2T_{k-1}$, que pode ser obtida a partir de uma pequena alteração sobre a figura acima apresentada (a cargo do estudante). Outra hipótese ainda era começar com uma relação de recorrência entre os P_k, nomeadamente $P_{k+1} = P_k + 3k + 1$.

FIM