Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 5 a 14 de abril de 2024

Data de Limite de Entrega

14 de abril de 2024, até às 23h59 de Portugal Continental

Tema

Combinatória Enumerativa

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com exceção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Nas questões 4 a 6 não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorreta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**	**6.**
0.70 val.	**1.2** val.	**1.2** val.

Normas a respeitar

Para a resolução deste E-fólio utilize apenas os recursos e os materiais disponibilizados na Página Central do curso.

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioA.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio A até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira, Ana Nunes, José Agapito e Nelson Faustino

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Dentro de um autocarro estão 15 passageiros que irão sair nas paragens A ou B. Sabendo que sai sempre alguém em cada uma das paragens e que o autocarro fica sem passageiros na paragem B, o número de maneiras distintas para que os <u>diferentes</u> passageiros saiam do autocarro é igual a

A) $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i,j\leq 15\\ i+j=15}} \binom{15}{i}\binom{15}{j}$

B) $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i,j\leq 15\\ i+j=15}} \binom{15}{i}\binom{15-i}{j}$

C) $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq i,j\leq 15\\ i+j=15}} \left[\binom{15}{i}+\binom{15-i}{j}\right]$

D) $\displaystyle\sum_{i=1}^{14} \binom{15}{i}$

2. Considere as seguintes afirmações:

(i) Existe uma bijeção entre $[256]$ e Seq_8

(ii) Existe uma bijeção entre $\mathcal{P}([8])$ e $[256]$

(iii) Existe uma bijeção entre $\mathcal{P}([4]) \times \mathcal{P}([4])$ e Seq_8

A lista completa de afirmações verdadeiras é a seguinte:

A) (i) e (ii)

B) (i) e (iii)

C) (ii) e (iii)

D) (i), (ii) e (iii)

3. Dados dois conjuntos não vazios X e Y, sabe-se que $f : \mathbb{Q} \to X$ é uma função sobrejetiva e que $g : X \to Y$ é uma função tal que a função composta $g \circ f$ é injetiva. Relativamente aos conjuntos X e Y podemos garantidamente afirmar:

A) $\#X > \#Y$

B) $\#X \geq \#Y$

C) $\#X < \#Y$

D) $\#X \leq \#Y$

Nas questões seguintes justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

4. O problema "*só com os algarismos 1, 2, 3 e 4, quantos números de 8 dígitos podemos construir de modo que cada um dos algarismos 1, 2, 3 e 4 apareça pelo menos uma vez?*" foi resolvido por um estudante da seguinte maneira:

Comece-se por distribuir os algarismos 1, 2, 3 e 4 pelas primeiras quatro posições, com o que fica garantido que cada um destes algarismos aparece pelo menos uma vez. Há $4!$ maneiras diferentes para o fazer. As restantes quatro posições (das unidades, dezenas, centenas e dos milhares) podem ser ocupadas por qualquer um dos algarismos 1, 2, 3, 4, num total de 4^4 possibilidades. A solução do problema é assim igual a $4! \times 4^4 = 6144$.

Analise esta resposta e, caso necessário, corrija-a.

5. Nas duas alíneas seguintes utilize as igualdades binomiais listadas na pág. 45 da Secção 1.2 do manual.

5.1. Por aplicação direta da expansão fatorial prova-se que

$$\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} = n^2, \quad n \geq 1.$$

Contudo, sem se utilizar a expansão fatorial, esta mesma igualdade pode ser verificada pelo método de indução matemática. Apresente esta verificação.

5.2. Calcule

$$\sum_{k=0}^{n} (k+n)(k-n).$$

6. Sejam $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

6.1. Quantas funções bijetivas distintas $f : [n] \to [n]$ é que existem?

6.2. Dada uma função $f : X \to Y$, pode sempre definir-se uma nova função $F : X \to f(X)$, sobrejetiva, por

$$F(x) := f(x), \quad \forall\, x \in X.$$

Considerando o conjunto de todas as funções injetivas

$$f : [n] \to [m],$$

quantas funções bijetivas F distintas podem definir-se?

FIM