Matemática Finita | 21082

Período de Realização

Decorre de 6 a 16 de maio de 2022

Data de Limite de Entrega

16 de maio de 2022, até às 23h59 de Portugal Continental

Tema

Teoria de Números

Critérios de avaliação e cotação

Na avaliação do trabalho serão tidos em consideração os seguintes critérios e cotações:

1. A cotação total deste e-Fólio é de 4 valores.
2. Com exceção das 3 questões de escolha múltipla, justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar. Não será atribuída classificação a uma resposta não justificada.
3. Cada questão de escolha múltipla tem a cotação de 0.3 valor. Por cada resposta incorreta será descontado 0.1 valor. É considerada errada uma questão com mais de uma resposta. A classificação mínima destas 3 questões é de 0 valores.
4. A distribuição da cotação é a seguinte:

1–3	ERRADAS				
C		0	1	2	3
E	0	0.0	0.0	0.0	0.0
R	1	0.3	0.2	0.1	
T	2	0.6	0.5		
AS	3	**0.9**			

4.	**5.**
0.8 val.	**2.3** val.

Normas a respeitar

As suas respostas às questões deste E-fólio não devem ultrapassar 6 páginas A4.

Escreva sempre com letra legível.

Depois de ter realizado o E-fólio produza um documento em **formato PDF** e nomeie o ficheiro com o seu número de estudante, seguido da identificação do E-fólio, segundo o exemplo apresentado: 000000efolioB.pdf

Deve carregar o referido ficheiro para a plataforma no dispositivo E-fólio B até à data e hora limite de entrega. Evite a entrega próximo da hora limite para se precaver contra eventuais problemas.

O ficheiro a enviar não deve exceder 10 MB.

Votos de bom trabalho!

Maria João Oliveira, Ana Nunes e Gil Bernardes

Enunciado

Em cada questão de escolha múltipla são apresentadas quatro opções, das quais uma, e só uma, obedece às condições pedidas.

1. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, considere as seguintes afirmações relativas ao algoritmo de Euclides:

(i) Existem $q, r \in \mathbb{N}$ tais que $a = bq + r$, $r < |b|$

(ii) Existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$, $r < b$

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

2. Considere as seguintes afirmações:

(i) A soma de três números primos é um número ímpar.

(ii) A diferença de dois números primos é um número par.

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

3. Dados dois números primos p e q, $p < q$, considere as seguintes afirmações:

(i) Todo o número inteiro $a < p$ é invertível módulo $q - p$

(ii) Todo o número inteiro $a > q$ é invertível módulo pq

Relativamente a estas afirmações podemos afirmar:

A) Ambas as afirmações são verdadeiras

B) A afirmação (i) é verdadeira, mas a afirmação (ii) é falsa

C) A afirmação (i) é falsa, mas a afirmação (ii) é verdadeira

D) Ambas as afirmações são falsas

Justifique cuidadosa e detalhadamente todos os cálculos, raciocínios e afirmações que efetuar.

4. Seja A um conjunto de $m \geq 1$ números inteiros positivos. Mostre que existe um subconjunto não vazio $B \subseteq A$ tal que a soma de todos os elementos de B é divisível por m[1].

[Sugestão: Considerando $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, suponha que nenhuma soma da forma $a_1 + \cdots + a_k$, $1 \leq k \leq m$, é divisível por m.]

5. Dado $p > 2$ um número primo prove que:

5.1. $\binom{p+1}{n} \equiv 0 \pmod{p}$ para qualquer número natural $2 \leq n \leq p-1$.

5.2. $\binom{p-1}{n} \equiv (-1)^n \pmod{p}$ para qualquer $0 \leq n \leq p-1$, $n \in \mathbb{N}$.

5.3. $\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$.

[Sugestão: Utilize as alíneas 5.1 e 5.2.]

FIM

[1] Para ilustrar o pretendido, considere o conjunto $A = \{3, 9, 14, 18, 23\}$ com 5 elementos. Se se considerar, por exemplo, $B = \{3, 14, 18\}$, tem-se $3 + 14 + 18 = 35$, que é divisível por 5.