Elementos de Probabilidades e Estatística (21037)

12 setembro 2019

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

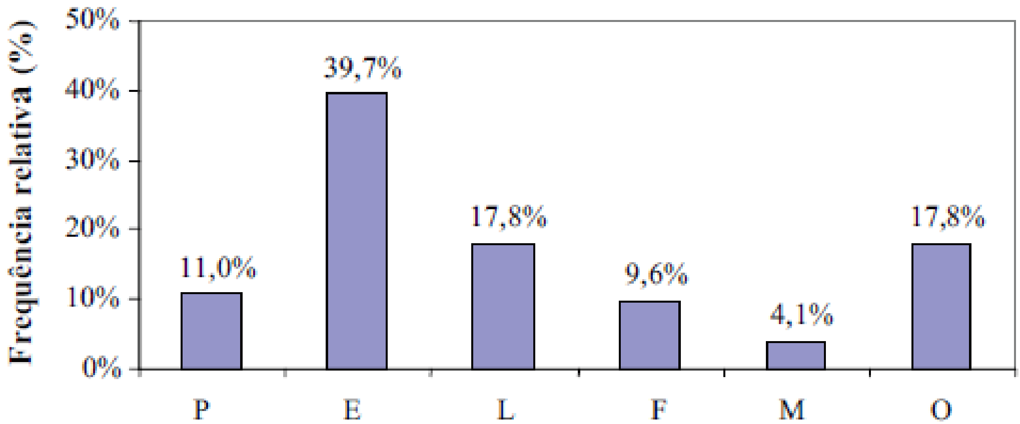
- **Exercício 1.1 (2 valores)**

País (k)	Frequência absoluta (N_k)	Frequência relativa (f_k)
Peru (P)	8	0.110
Espanha (E)	29	0.397
Lituánia (L)	13	0.178
França (F)	7	0.096
México (M)	3	0.041
Outros (O)	13	0.178
Total	N=73	1.000

Note-se que $N = \sum_{k=1}^{6} N_k$ e que $f_k = \frac{N_k}{N}$

- **Exercício 1.2 (1.25 valores)**

Gráfico de Barras com frequências relativas:

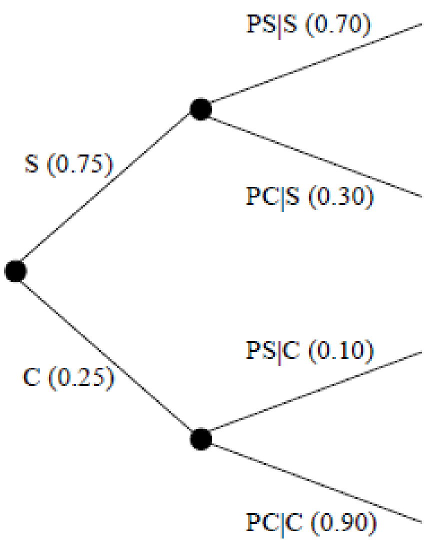


- **Exercício 2.1 (2 valores)**

Considere-se os seguintes acontecimentos:

S: Faz sol.
C: Chove.
PS: O barómetro prevê sol.
PC: O barómetro prevê chuva.
BE: O barómetro erra a previsão.

Representa-se em seguida a árvore de resultados correspondente:



Pede-se a probabilidade do barómetro errar a previsão, P(BE).

$$P(\mathrm{BE}) = P(\mathrm{S} \cap \mathrm{PC}) + P(\mathrm{C} \cap \mathrm{PS})$$

$$= P(S) \cdot P(\mathrm{PC}|\mathrm{S}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{PS}|\mathrm{C})$$

$$= 0.75 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.10$$

$$= 0.25.$$

- **Exercício 2.2 (2 valores)**

Considere-se os mesmos acontecimentos e árvores de resultados do exercício 2.1. Pede-se agora a probabilidade de fazer sol num dia para o qual a previsão seja cuva, $P(S|PC)$

$$P(\mathrm{S}|\mathrm{PC}) = \frac{P(S \cap \mathrm{PC})}{P(PC)}$$

$$= \frac{P(\mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{PC}|\mathrm{S})}{P(\mathrm{S}) \cdot P(PC|\mathrm{S}) + P(\mathrm{C}) \cdot P(\mathrm{PC}|\mathrm{C})}$$

$$= \frac{0.75 \cdot 0.30}{0.75 \cdot 0.30 + 0.25 \cdot 0.90}$$

$$= 0.5.$$

- **Exercício 3.1 (1.5 valores)**

  A probabilidade do funcionário permanecer 10 minutos sem executar nenhum retoque é equivalente à probabilidade de, numa sequência de 10 caixas, nenhuma precisar de ser retocada.
  Seja:
  Y – v.a. número de caixas retocadas em 10 minutos
  p – probabilidade de uma caixa ser manualmente retocada pelo funcionário; *p=0.07*
  q=1-0.07=0.93 - probabilidade de uma caixa não necessitar de ser retocada

  A v.a. *Y* segue uma distribuição Binomial

$$Y \sim Bin(10{,}0.07)$$

$$P(Y = y) = p(y) = \binom{10}{y} 0.07^y 0.93^{10-y}$$

  e

$$P(Y = 0) = 0.93^{10} = 0.484$$

- **Exercício 3.2 (2.5 valores)**

  Este exercício pode ser resolvido de 2 maneiras.

  a. Alternativa 1
     Seja *Y* – v.a. número de caixas dobradas sem retoque até ocorrer a segunda caixa a necessitar de retoque. *Y* segue uma distribuição Binomial Negativa

$$Y \sim BN(2{,}0.07)$$

$$p(y) = \binom{y+2-1}{y} \cdot 0.07^2 \cdot (1-0.07)^y.$$

     Numa sequência de 6 caixas, a probabilidade de a última ser a segunda caixa a necessitar de retoque é:

$$p(4) = \binom{5}{4} \cdot 0.07^2 \cdot 0.93^4 = 0.0183.$$

  b. Alternativa 2

Se entre 6 caixas dobradas, a sexta caixa corresponder à segunda a necessitar de retoque, implica que nas 5 primeiras caixas haja uma a precisar de retoque e que a sexta caixa também precisa de retoque. Considere os acontecimentos:

A: existir uma caixa a precisar de retoque nas 5 primeiras caixas dobradas
B: a sexta caixa dobrada também precisa de retoque

Seja a Z - v.a. número de caixas retocadas num conjunto de 5, que segue uma distribuição Binominal

$$Z \sim Bin(5{,}0.07)$$

Nestas condições, a probabilidade pretendida é

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = p(\mathrm{B}|\mathrm{A}) \cdot p(\mathrm{A}).$$

e

$$p(\mathrm{A}) = p(\mathrm{Z} = 1)$$

$$p(Z=1) = \binom{5}{1} \cdot 0.07^1 \cdot 0.93^4.$$

Como A e B são independentes

$$p(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) = 0.07$$

$$p(A \cap B) = \left[\binom{5}{1} \cdot 0.07^1 \cdot 0.93^4\right] \cdot 0.07 = 0.0183$$

- **Exercício 3.3 (1.5 valores)**

Seja Y – v.a número de caixas dobradas até ocorrer a primeira caixa a precisar de retoque. Esta v.a. segue uma distribuição Geométrica

$$Y \sim G(0.07)$$

O valor esperado de Y é

$$\mu_y = \frac{q}{p},$$

O tempo em média que o funcionário permanece sem executar nenhum retoque é

$$\mu_y = 0.93/0.07 = 13.28$$

caixas.
O que equivale a 13.28 minutos.
Se tivessem utilizado o formulário também seria considerado correto, e daria 14.28 minutos.

- **Exercício 4.1 (1.5 valores)**

Valor esperado de X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^3 x \frac{4}{27}(9x - 6x^2 + x^3) dx$$

$$= \frac{4}{27}\int_0^3 (9x^2 - 6x^3 + x^4)dx = \frac{4}{27}[81 - 162 + 81] = 0$$

- **Exercício 4.2.1 (1.25 valores)**

$$P(X \le 1.50) = \int_0^{1.5} \left(\frac{4}{27}\right) \cdot (9x - 6x^2 + x^3) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{4}{27} \cdot \frac{9}{2} x^2 - \frac{4}{27} \cdot \frac{6}{3} x^3 + \frac{4}{27} \cdot \frac{1}{4} x^4\right]_0^{1.5}$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_0^{1.5}$$

$$= 0.688.$$

- **Exercício 4.2.2 (1.25 valores)**

$$P(X \ge 2.0) = 1 - P(X < 2.0)$$

$$= 1 - \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_0^2$$

$$= 1 - 0.889 = 0.111.$$

- **Exercício 4.2.3 (1.25 valores)**

$$P(1.0 \le X \le 2.5) = P(X \le 2.5) - P(X \le 1.0)$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4\right]_{1.0}^{2.5}$$

$$= 0.984 - 0.407 = 0.577.$$

- **Exercício 4.3 (2 valores)**

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u) \cdot du$$

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{4}{27}\right) . (9u - 6u^2 + u^3) \cdot du = \left[\frac{2}{3} u^2 - \frac{8}{27} u^3 + \frac{1}{27} u^4\right]_0^x$$

$$= \frac{2}{3} x^2 - \frac{8}{27} x^3 + \frac{1}{27} x^4.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^3 + \frac{1}{27}x^4 & 0 \leq x < 3 \\ 1 & x \geq 3 \end{cases}$$