E-Fólio A - Resolução

1. Considere a seguinte função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\cos(2x)}{x^2+1} & x < 0 \\[2ex] \dfrac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5} & x \geq 0. \end{cases}$$

   (a) **[0.1 val.]** Indique o domínio de f.
   O domínio de f é $D_f = \mathbb{R}$.

   (b) **[0.4 val.]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   Temos

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\cos(2x)}{x^2+1}\right)$$

e notamos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$, pelo que para qualquer $x < 0$, temos

$$-\frac{x}{x^2+1} \geq \frac{x\cos(2x)}{x^2+1} \geq \frac{x}{x^2+1}$$

e

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}.$$

Como $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$ e também $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = 0$, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \frac{0}{1+0} = 0$$

e também

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = 0.$$

Então, pelo teorema dos limites enquadrados, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Uma resolução alternativa para o cálculo deste limite, seria

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\cos(2x)}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x\cos(2x)}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{\cos(2x)}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

Agora notamos que, para todo $x < 0$, temos

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(2x)}{x} \leq -\frac{1}{x},$$

e como $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ e também $\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, novamente, pelo teorema dos limites enquadrados, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(2x)}{x}=0.$$

Como também temos $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$, concluímos que

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\cos(2x)}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

Calculemos agora

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5}\right).$$

Temos que, para todo $x\in\mathbb{R}$, $-1\leq\sin(3x)\leq 1$, logo (para $x>-5$)

$$-\frac{e^{-x}}{x+5}\leq\frac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5}\leq\frac{e^{-x}}{x+5}.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+5}=0$, então

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{-x}}{x+5}\right)=0$$

e também

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{e^{-x}}{x+5}\right)=0,$$

novamente pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.$$

Uma resolução alternativa para o cálculo deste limite poderia ser

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5}$$

e notar que, para todo $x>0$, temos

$$|e^{-x}\sin(3x)|=\underbrace{|e^{-x}|}_{\leq 1}\underbrace{|\sin(3x)|}_{\leq 1}\leq 1\times 1=1,$$

pelo que

$$-1\leq e^{-x}\sin(3x)\leq 1$$

e, portanto

$$-\frac{1}{x+5}\leq\frac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5}\leq\frac{1}{x+5}.$$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+5}=0$ e também $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x+5}\right)=0$, pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(c) **[0.4 val.]** Estude a continuidade da função f no seu domínio.

Para $x < 0$, a função f é definida como o produto das funções $\dfrac{x}{x^2+1}$ e $\cos(2x)$. A função $\dfrac{x}{x^2+1}$ é uma função racional (cujo de denominador nunca se anula, pois $x^2+1>0$), pelo que é uma função elementar. A função $\cos(2x)$ resulta da composição da função trigonométrica cosseno com o polinómio $2x$, ambas funções elementares, pelo que $\cos(2x)$ é também uma função elementar. Portanto, para $x<0$, f é contínua, pois é o produto de duas funções elementares.

Para $x > 0$, a função f resulta do produto das funções e^{-x} e $\sin(3x)$ e divisão pela função $x+5$ (que não se anula para $x>0$). Estas três funções são funções elementares (e^{-x} é a composição da função exponencial com o polinómio $-x$, $\sin(3x)$ é a composição da função trigonométrica seno com o polinómio $3x$ e $x+5$ é um polinómio). Então, para $x>0$, f é uma função elementar, e, portanto, contínua.

Falta apenas estudar a continuidade da função f no ponto $x=0$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{-x}\sin(3x)}{x+5}\right) = \frac{e^0\times\sin(0)}{5} = \frac{0}{5} = 0 = f(0)$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x\cos(2x)}{x^2+1}\right) = \frac{0\times\cos(0)}{1} = 0.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x),$$

concluímos que f é contínua no ponto $x=0$ e, portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(d) **[0.2 val.]** Calcule a taxa de variação média de f no intervalo $[-\pi,\pi]$.

A taxa de variação média de f no intervalo $[-\pi,\pi]$ é dada por

$$\Delta(f;-\pi,\pi) = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{\pi-(-\pi)} = \frac{\frac{e^{-\pi}\overbrace{\sin(3\pi)}^{=0}}{\pi+5} - \frac{-\pi\overbrace{\cos(-2\pi)}^{=1}}{(-\pi)^2+1}}{2\pi} = \frac{\pi}{(2\pi)\times(\pi^2+1)} = \frac{1}{2(\pi^2+1)}.$$

2. **[0.7 val.]** Prove por definição de limite que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^4\cos(e^x)+1\right) = 1.$$

Pretendemos provar que

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ :\ 0<|x|<\delta \Rightarrow \left|\left(x^4\cos(e^x)+1\right)-1\right| = \left|x^4\cos(e^x)\right| < \epsilon.$$

Temos que

$$\left|x^4\cos(e^x)\right| = \left|x^4\right|\underbrace{\left|\cos(e^x)\right|}_{\leq 1} \leq |x^4| = x^4.$$

Assim, qualquer que seja $\epsilon>0$, basta tomar $\delta=\epsilon^{\frac{1}{4}}$, para que, sempre que $|x|<\delta$, se tenha necessariamente $\left|\left(x^4\cos(e^x)+1\right)-1\right|<\epsilon$. Concluímos, portanto, que

$$\lim_{x\to 0}\left(x^4\cos(e^x)+1\right) = 1.$$

3. **[0.75 val.]** Calcule
$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^4+x^3-16x^2+20x)}{(x^2-3x+2)}.$$

A substituição directa de x por 2, conduz a uma indeterminação do tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Vamos agora calcular a divisão do polinómio no numerador por $x-2$, pela regra de Ruffini obtemos

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & -16 & 20 & 0 \\ 2 & & 2 & 6 & -20 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & -10 & 0 & 0 \end{array}$$

ou seja, obtemos que $x^4+x^3-16x^2+20x = (x-2)(x^3+3x^2-10x)$. Aplicando o mesmo processo ao denominador

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -3 & 2 \\ 2 & & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

verificamos que $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1)$. Assim,

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x^4+x^3-16x^2+20x)}{(x^2-3x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^3+3x^2-10x)}{(x-2)(x-1)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2-10x}{x-1} = \frac{2^3+3\times 2^2-10\times 2}{2-1} = \frac{0}{1} = 0.$$

4. **[0.75 val.]** Calcule
$$\lim_{n\to -\infty} \frac{\sin(n)n+n^2}{n^4+3n}.$$

Temos que para $n<0$,

$$\lim_{n\to -\infty} \frac{\sin(n)n+n^2}{n^4+3n} = \lim_{n\to -\infty} \frac{\frac{\sin(n)n+n^2}{n^4}}{\frac{n^4+3n}{n^4}} = \lim_{n\to -\infty} \frac{\frac{\sin(n)}{n^3}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n^3}}.$$

Temos $-1 \leq \sin(n) \leq 1$, pelo que

$$\frac{1}{n^3} \leq \frac{\sin(n)}{n^3} \leq -\frac{1}{n^3}$$

e como $\lim\limits_{n\to -\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ e também $\lim\limits_{n\to -\infty} \left(-\frac{1}{n^3}\right) = 0$, pelo teorema dos limites enquadrados concluímos que

$$\lim_{n\to -\infty} \frac{\sin(n)}{n^3} = 0.$$

Como temos $\lim\limits_{n\to-\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ e também $\lim\limits_{n\to-\infty} \left(\dfrac{3}{n^3}\right) = 0$, temos

$$\lim_{n\to-\infty} \frac{\sin(n)n + n^2}{n^4 + 3n} = \lim_{n\to-\infty} \frac{\frac{\sin(n)}{n^3} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^3}} = \frac{0+0}{1+0} = 0.$$

5. **[0.7 val.]** Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$. Prove que a função $g(x) = \sin(4x)f(x)$ é limitada no intervalo $[a, b]$.

   Como f é uma função contínua num intervalo limitado e fechado $[a, b]$, pelo teorema de Weierstrass concluímos que f assume um valor máximo e um valor mínimo nesse intervalo, isto é, existem pontos x_{min} e x_{max} em $[a, b]$ tais que

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max}), \ \forall x \in [a, b],$$

   ou seja

$$|f(x)| \leq \max\{|f(x_{min})|, |f(x_{max})|\} := M, \ \forall x \in [a, b].$$

   Por outro lado, como $-1 \leq \sin(4x) \leq 1$, concluímos que

$$|g(x)| = |\sin(4x)f(x)| = \underbrace{|\sin(4x)|}_{\leq 1}\underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \leq M, \ \forall x \in [a, b],$$

   pelo que

$$-M \leq g(x) \leq M, \ \forall x \in [a, b]$$

   e, portanto g é limitada no intervalo $[a, b]$.

FIM