E-fólio A | Instruções para a realização do E-fólio

Investigação Operacional | 21076

Nome: Vera Cláudia Teixeira do Amaral

B. I.: 10026482 **Nº de Estudante:** 2201096

Curso: LEI **Turma:** 3

Data: 4/4/2023 **Ano Lectivo:** 2022/23

Docentes: Patrícia Engrácia, Elsa Negas e Clarence Protin

(1) $X \rightarrow$ Quantidade de terra escavada por semana
(1 unidade $= 1000\ m^3$)

$Y \rightarrow$ Quantidade de areia escavada por semana
(1 unidade $= 1000\ m^3$)

Como $1000\ m^3$ de terra têm um lucro de 57 u.m. e $1000\ m^3$ de areia têm um lucro de 60 u.m., para se maximizar os lucros semanais precisamos de otimizar a seguinte função objetivo:

$$\max f = 57X + 60Y$$

Vamos agora perceber as restrições a que está sujeita:

h/semana	MÁQUINA A	MÁQUINA B	TRABALHADORES
Terra	8	4	50
Areia	4	5	13
TOTAL	40	40	$40 \times 5 = 200$

Restrições:

$8X + 4Y \leq 40$ (a máquina A tem um limite semanal de 40 horas)

$4X + 5Y \leq 40$ (a máquina B tem um limite semanal de 40 horas)

$50X + 13Y \leq 200$ (cada trabalhador tem um limite semanal de 40 horas e são 5 trabalhadores a escavar)

$X, Y \geq 0$ (não negatividade)

Formalização:

$$\max f = 57X + 60Y \quad \text{s.a.} \begin{cases} 8X + 4Y \leq 40 \\ 4X + 5Y \leq 40 \\ 50X + 13Y \leq 200 \\ X, Y \geq 0 \end{cases}$$

2 1

$$\max f = 3x + y$$

sujeito a: $\begin{cases} 2x + y \leq 20 \\ x + 3y \geq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$

a) Para poder resolver graficamente o P.L. vou começar por definir as rectas que limitem a área de soluções possíveis.

$2x + y = 20 \Leftrightarrow y = 20 - 2x$

x	y
0	20
10	0

A reta passa pelos pontos: $(0,20)$ e $(10,0)$

O semiplano que nos interessa é:

$(0,0) \in$ semiplano?

$2 \times 0 + 0 \leq 20 \Leftrightarrow 0 \leq 20 \rightarrow$ proposição verdadeira

Então o semiplano é o que contém a origem $(0,0)$.

$x + 3y = 18 \Leftrightarrow 3y = 18 - x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = 6 - \frac{x}{3}$

x	y
0	6
18	0

A reta passa pelos pontos: $(0,6)$ e $(18,0)$

Vamos determinar o semiplano que nos interesse.

$(0,0) \in$ semiplano?

$0 + 3 \times 0 \geq 18 \Leftrightarrow 0 \geq 18 \rightarrow$ proposição falsa

Então o semiplano que nos interessa é o que NÃO contém a origem $(0,0)$

Vamos agora determinar o ponto de intersecção das duas retas:

~~2x+y = x+3y~~

2) a) continuação

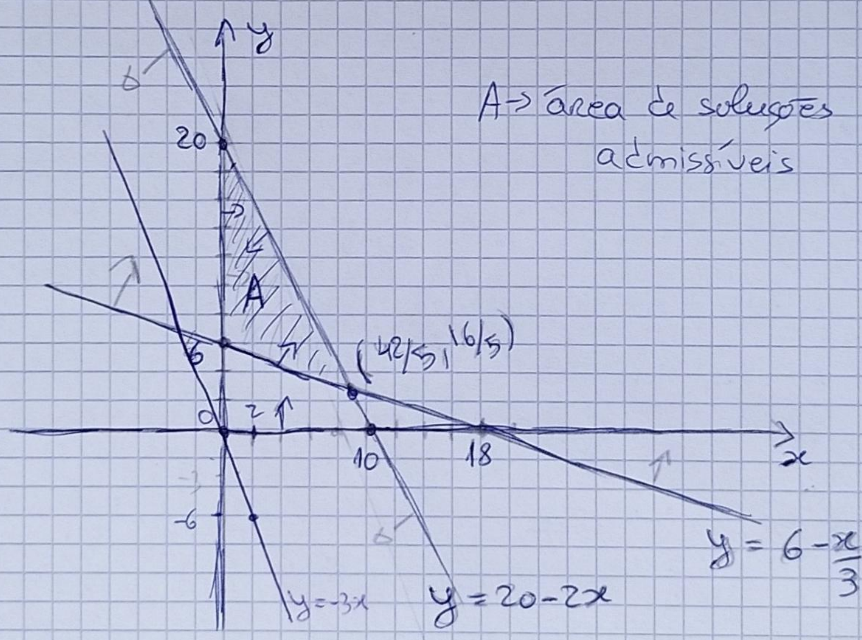
Intersecção das rectas:

$$20 - 2x = 6 - \frac{x}{3} \Leftrightarrow 60 - 6x = 18 - x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -5x = -42 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{42}{5}$$

$$y = 20 - 2 \times \frac{42}{5} \Leftrightarrow y = 20 - \frac{84}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{100 - 84}{5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{16}{5}$$

$P.I = \left(\frac{42}{5}, \frac{16}{5}\right)$

Podemos agora desenhar o nosso gráfico:



A nossa função objetivo no nível 0 pode ser escrita como a reta

$$3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x$$

x	y
0	0
2	-6

Ao traçar paralelas a esta reta, o último ponto de área admissível que tocam é o $(42/5, 16/5)$ sendo esta a solução ótima.

2 a) cont. ③

No ponto $(42/5, 16/5)$

$$F = 3 \times \frac{42}{5} + \frac{16}{5} = \frac{126}{5} + \frac{16}{5} = \frac{142}{5} \text{ (valor máximo)}$$

b) Para determinar o mínimo da nossa função objetivo fazemos o mesmo procedimento da alínea a).

O ponto que nos interessa agora é o primeiro a ser tocado pelas retas paralelas a $y=-3x$.

Que é o ponto $(0,6)$.

Neste ponto:

$F = 3\times 0 + 6 = 6$ (valor mínimo).

c) Max $F = 3x + y$

$$\text{s.a.} \begin{cases} 2x + y \leq 20 \\ x + 3y \geq 18 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Comesamos por representar o problema na forma standard, introduzindo variáveis de folga para transformar as inequações em equações.

Como as variáveis são todas positivas, quando a inequação é do tipo $\geq$, a variável de folga tem coeficiente -1. Quando a inequação é do tipo $\leq$ a variável de folga tem coeficiente 1.

Forma Standard

$$\text{Max } F = 3x + y \Leftrightarrow \text{Min } (-F) = -3x - y$$

$$\Leftrightarrow \text{Min } (-F) = -3x_1 - x_2$$

$$\text{s.a.} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

$$x_1 + 3x_2 - x_4 = 18$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

2 c) cont. ④

Temos de adicionar também uma variável artificial e depois começamos a aplicar o método das duas fases do Simplex.

Ficamos com as restrições:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1 + 3x_2 - x_4 + a_1 = 18$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, a_1 \geq 0$$

1.ª fase

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b
x_3	2	1	1	0	0	20
a_1	1	$\boxed{3}$	0	−1	1	18
z	−1	−3	0	1	0	−18

Sai da base a_1 e entra x_2 porque o coeficiente de z com maior valor absoluto é o de x_2 (−3). E na coluna do x_2 procuremos θ.

$$\theta = \min \left\{ 20/1 \; ; \; 18/3 \right\} = 6$$

Cálculos:

Fila do Pivot (fila 2)

$18/3 = 6$

$1/3 = 1/3$

$3/3 = 1$

$0/3 = 0$

$-1/3 = -1/3$

$1/3 = 1/3$

Fila 1:

$20 - (1 \times 6) = 14$

$2 - (1 \times \frac{1}{3}) = 5/3$

$1 - (1 \times 1) = 0$

$1 - (1 \times 0) = 1$

$0 - (1 \times (-\frac{1}{3})) = +\frac{1}{3}$

$0 - (1 \times \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$

2c) cont. (5)

fila do Z:

$-18 - (-3 \times 6) = 0$

$-1 - (-3 \times \frac{1}{3}) = 0$

$-3 - (-3 \times 1) = 0$

$0 - (-3 \times 0) = 0$

$1 - (-3 \times (-1/3)) = 0$

$0 - (-3 \times \frac{1}{3}) = 1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	a_1	b
x_3	5/3	0	1	1/3	-1/3	14
x_2	1/3	1	0	-1/3	1/3	6
Z	0	0	0	0	1	0

Como encontramos uma solução possível para o problema (matriz identidade) vamos para a 2ª fase.

2ª fase:

Vamos eliminar a coluna da variável artificial

Vamos modificar a fila da função objetivo pela do problema original.

Cálculos:

$-0 + (0 \times 14) + (1 \times 6) = 6$

$-3 + (0 \times \frac{5}{3}) + (1 \times \frac{1}{3}) = -8/3$

$-1 + (0 \times 0) + (1 \times 1) = 0$

$-0 + (0 \times 1) + (1 \times 0) = 0$

$-0 + (0 \times \frac{1}{3}) + 1 \times (-\frac{1}{3}) = -1/3$

2 c) cont. ⑥

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_3	$\boxed{5/3}$	0	1	1/3	14
x_2	1/3	1	0	-1/3	6
z	-8/3	0	0	-1/3	6

Sai x_3 da base e entra x_1 porque $-\frac{8}{3}$ é o maior coeficiente em valor absoluto de z (coluna-pivot) e $\theta = \min\left\{\frac{14}{5/3} ; \frac{6}{1/3}\right\} = \frac{42}{5}$

Cálculos:

Fila Pivot (fila 1)

$\frac{14}{\frac{5}{3}} = \frac{42}{5}$

$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$

$\frac{0}{5/3} = 0$

$\frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$

$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{5}$

Fila 2

$6 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{42}{5}\right) = \frac{16}{5}$

$\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \times 1\right) = 0$

$1 - \left(\frac{1}{3} \times 0\right) = 1$

$0 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{5}\right) = -\frac{1}{5}$

$-1/3 - \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{5}$

Fila Z:

$6 - \left(-\frac{8}{3} \times \frac{42}{5}\right) = \frac{142}{5}$

$-\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \times 1\right) = 0$

$0 - \left(-\frac{8}{3} \times 0\right) = 0$

$0 - \left(-\frac{8}{3} \times \frac{3}{5}\right) = 8/5$

$-1/3 - \left(-8/3 \times \frac{1}{5}\right) = 1/5$

2 c) cont.

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
x_1	1	0	$3/5$	$1/5$	$42/5$
x_2	0	1	$-1/5$	$-2/5$	$16/5$
z	0	0	$8/5$	$1/5$	$142/5$

A solução ótima é $z = 142/5$

$x_1 = 42/5$

$x_2 = 16/5$