Matemática Finita | 21082

Proposta de Resolução Sumária

Grelha de correção das respostas de escolha múltipla:

1.	2.	3.
A)	C)	A)

4. De acordo com o critério de divisibilidade por 9 do texto sobre Congruências, $(3a7b8)_{10}$ é divisível por 9 se, e só se,

$$3 + a + 7 + b + 8 = 18 + a + b$$

for divisível por 9. Como 18 é divisível por 9, tem-se que a divisibilidade de $(3a7b8)_{10}$ por 9 é equivalente à divisibilidade de $a+b$ por 9. Os casos possíveis são assim

$$a + b = 0, \quad a + b = 9, \quad a + b = 18. \tag{1}$$

Mas de acordo com o critério de divisibilidade por 11 do texto sobre Congruências, $(3a7b8)_{10}$ é divisível por 11 se, e somente se,

$$(3 + 7 + 8) - (a + b) = 18 - (a + b)$$

for divisível por 11. Dentro das três possibilidades (1) tal só é possível se $a + b = 18$, o que equivale a $a = b = 9$.

Conclusão, para $a = b = 9$ o número $(3a7b8)_{10}$ é divisível por 9 e por 11.

5.1. Como $\mathrm{mdc}(ab, m) = 1$, pelo teorema de Bachet-Bézout existem $x, y \in \mathbb{Z}$ tais que

$$(ab)x + my = 1.$$

Como $bx, y \in \mathbb{Z}$, a igualdade anterior é ainda igual a $a(bx) + my = 1$, o que pelo Corolário 1.8 implica que $\mathrm{mdc}(a, m) = 1$ já que, por definição, $\mathrm{mdc}(a, m) > 0$. De igual modo tem-se que $b(ax) + my = 1$ com $ax, y \in \mathbb{Z}$, o que conduz pelo mesmo corolário a $\mathrm{mdc}(b, m) = 1$.

5.2. Novamente pelo teorema de Bachet-Bézout existem $x, y, x', y' \in \mathbb{Z}$ tais que

$$ax + my = 1, \quad bx' + my' = 1$$

pelo que

$$(ax + my) \cdot (bx' + my') = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ou seja,

$$ab(xx') + m(ybx' + myy' + axy') = 1.$$

Como $xx', ybx'+myy'+axy' \in \mathbb{Z}$, resulta do Corolário 1.8 que $\mathrm{mdc}(ab, m) = 1$.

6. Uma vez que 2 e 11 são dois números primos, $\mathrm{mdc}(2, 11) = 1$. Assim e pela Proposição 1.24, "cancelamento",

$$x + 4y \equiv 4 \pmod{11} \iff 2x + 8y \equiv 8 \pmod{11}$$

resultando da "compatibilidade com a diferença" (mesma proposição) que

$$2x + 8y \equiv 8 \pmod{11}, 2x + 3y \equiv 1 \pmod{11} \implies 5y \equiv 7 \pmod{11}.$$

Uma vez que $5^{-1} = 9$ em $\mathbb{Z}_{11}$ (Proposições 1.32 ou 1.37), obtém-se então

$$y \equiv 9 \cdot 7 \equiv 8 \pmod{11}.$$

Isto significa que $4y \equiv 4 \cdot 8 \equiv 10 \pmod{11}$, pelo que, pela propriedade de "reflexividade" (Proposição 1.24),

$$4 \equiv x + 4y \equiv x + 10 \pmod{11}.$$

Como $-10 \equiv 1 \pmod{11}$, resulta da aplicação das propriedades "simetria" e "compatibilidade com a soma" da mesma proposição, que

$$x \equiv 1 + 4 \pmod{11}.$$

Conclusão: $x \equiv 5 \pmod{11}$, $y \equiv 8 \pmod{11}$.

7. Pelo Lema 1.11 alínea 2,

$$\mathrm{mdc}(b + a, a) = \mathrm{mdc}(b, a) = 1$$

e

$$\mathrm{mdc}(a + b, b) = \mathrm{mdc}(a, b) = 1$$

A resolução segue por aplicação do resultado provado na alínea 5.2 tomando nesse exercício $m = a + b$.